

TÉCNICAS DE COLOCAÇÃO BASEADAS EM SISTEMAS DE WAVELETS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

Luís MS Castro* e Silvia Bertoluzza**

* Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, IST-UTL
Avenida Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal
e-mail: luis@civil.ist.utl.pt, web: <http://www.civil.ist.utl.pt/> luis

** Istituto di Analisi Numerica del C.N.R.
via Ferrata, 1, 27100 Pavia, Itália
e-mail: wavelet@dragon.ian.pv.cnr.it, web: <http://dragon.ian.pv.cnr.it/~aivlis>

Palabras clave: Wavelets, Análise Adaptativa, Métodos de Colocação, Métodos sem Malha, Elasticidade Plana, Lajes de Reissner-Mindlin.

Resumen.

Nesta comunicação ilustra-se a aplicação de uma técnica de colocação adaptativa na resolução de problemas de estruturas laminares planas (placas e lajes de Reissner-Mindlin) em regime elástico linear. O algoritmo desenvolvido baseia-se na utilização dos sistemas de wavelets de Dubuc-Deslaurier. A exploração das propriedades multiresolução dos sistemas de wavelets permite o desenvolvimento de uma técnica adaptativa bastante simples e eficaz, onde a identificação das zonas do domínio onde é necessário refinar é efectuada apenas com base no valor dos coeficientes da expansão resultantes da análise da malha actual.

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas de wavelets têm vindo a ser aplicados com assinalável sucesso na área do processamento de sinais e de imagens. Grande esforço tem vindo a ser desenvolvido em anos recentes pela comunidade científica no sentido de tentar explorar as características e potencialidades únicas destas funções no desenvolvimento de ferramentas numéricas eficazes para a resolução de equações diferenciais.

Bertoluzza [1, 2] apresentou uma técnica de colocação que permite a utilização dos sistemas de wavelets definidos por Dubuc e Deslaurier [5] na resolução adaptativa de equações diferenciais de segunda e de quarta ordem. Esta comunicação tem por objectivo ilustrar a aplicação desta metodologia na resolução de problemas no domínio da elasticidade, nomeadamente na análise em regime elástico linear de problemas de placas e de lajes de Reissner-Mindlin.

O modelo apresentado pode ser classificado como sendo um Método sem Malha, uma vez que não é requerida qualquer sub-divisão do domínio em elementos. A solução inicial é sempre conseguida à custa da consideração de uma distribuição uniforme de pontos de colocação. No decorrer da análise adaptativa, o número e a localização de tais pontos vai sendo ajustada de forma automática.

A grande vantagem dos algoritmos de refinamento adaptativo aqui ilustrados reside na sua extrema simplicidade. Tendo em conta as propriedades dos sistemas de wavelets utilizados como funções de aproximação, a identificação das zonas do domínio onde é necessário refinar a solução é efectuada apenas com base no valor dos coeficientes da expansão.

Na primeira secção são recapituladas as equações fundamentais envolvidas na caracterização do comportamento de placas e lajes em regime elástico linear. São depois apresentados os sistemas de wavelets de Dubuc-Deslaurier e a forma através da qual se podem construir bases de aproximação no intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$. É depois discutido o desenvolvimento de uma técnica de colocação com base na utilização de um conjunto de pontos distribuídos de forma não-uniforme. É por fim descrito de forma simplificada o algoritmo adaptativo utilizado. Os detalhes referentes à construção da base de wavelets e o desenvolvimento rigoroso da técnica de colocação adaptativa podem ser encontrados nas referências [1, 2]. A comunicação termina com a apresentação e discussão de um conjunto de exemplos de aplicação.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Nesta secção é apresentada um breve recapitulação das grandezas e equações fundamentais envolvidas na caracterização do comportamento de placas e de lajes de Reissner-Mindlin.

Considera-se sempre que o domínio da estrutura, Ω , se encontra referido a um sistema de eixos cartesianos, (x, y) .

A fronteira do domínio, Γ , é sub-dividida em duas parcelas complementares; na primeira, denotada por Γ_u , é imposto o valor do campo de deslocamentos (fronteira de Dirichlet ou cinemática), enquanto que na segunda, denotada por Γ_σ , se prescreve o valor das cargas aplicadas (fronteira de Neumann ou estática).

As equações que regem o comportamento das placas podem ser escritas no formato [3]:

Problema 1

Determinar $\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T$ de tal forma que:

$$\mathcal{A} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (\Omega)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (\Gamma_u)$$

$$\mathcal{B} \mathbf{u} = \mathbf{t} \quad (\Gamma_\sigma)$$

onde o vector $\mathbf{f} = [-f_x, -f_y]^T$ lista as forças de massa aplicadas no domínio, $\mathbf{t} = [t_x, t_y]^T$ reúne as cargas aplicadas ao longo da fronteira estática e $\mathbf{g} = [\bar{u}_x, \bar{u}_y]^T$ representa o valor imposto para os deslocamentos ao longo da fronteira cinemática.

Os operadores \mathcal{A} e \mathcal{B} são dados pelas igualdades:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} e_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & (e_2 + e_3) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ (e_2 + e_3) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & e_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} e_1 n_x \frac{\partial}{\partial x} + e_3 n_y \frac{\partial}{\partial y} & e_2 n_x \frac{\partial}{\partial y} + e_3 n_y \frac{\partial}{\partial x} \\ e_3 n_x \frac{\partial}{\partial y} + e_2 n_y \frac{\partial}{\partial x} & e_3 n_x \frac{\partial}{\partial x} + e_1 n_y \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Nas equações anteriores, os parâmetros e_1 , e_2 e e_3 , dependem das constantes elásticas que permitem caracterizar o comportamento do material,

$$e_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad e_2 = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad e_3 = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

onde E corresponde ao módulo de elasticidade e ν ao coeficiente de Poisson.

Uma vez conhecidas as componentes do vector deslocamento, as componentes independentes do tensor das tensões podem ser determinadas a partir das igualdades:

$$\sigma_{xx} = e_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_2 \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\sigma_{yy} = e_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_1 \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\sigma_{xy} = e_3 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Considere-se agora uma laje de Reissner-Mindlin. As equações que regem o comportamento deste tipo de elemento estrutural podem ser condensadas na forma [4]:

Problema 2

Determinar $\mathbf{u} = [\theta_x, \theta_y, w]^T$ de tal forma que:

$$\mathcal{A} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (\Omega)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (\Gamma_u)$$

$$\mathcal{B} \mathbf{u} = \mathbf{t} \quad (\Gamma_\sigma)$$

Os operadores \mathcal{A} e \mathcal{B} são agora definidos pelas igualdades:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} D_2 \frac{\partial}{\partial x} & D_2 \frac{\partial}{\partial y} & D_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ D_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - D_2 & \nu D_f \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -D_2 \frac{\partial}{\partial x} \\ \nu D_f \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & D_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_2 & -D_2 \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} D_2 n_x & D_2 n_y & D_2 \frac{\partial}{\partial x} n_x + D_2 \frac{\partial}{\partial y} n_y \\ D_f \frac{\partial}{\partial x} n_x + D_1 \frac{\partial}{\partial y} n_y & \nu D_f \frac{\partial}{\partial y} n_x + D_1 \frac{\partial}{\partial x} n_y & 0 \\ \nu D_f \frac{\partial}{\partial x} n_y + D_1 \frac{\partial}{\partial y} n_x & D_f \frac{\partial}{\partial y} n_y + D_1 \frac{\partial}{\partial x} n_x & 0 \end{bmatrix}$$

Os parâmetros D_f , D_1 e D_2 , dependem das propriedades elásticas do material e da espessura da laje, h . Tem-se então:

$$D_f = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad , \quad D_1 = \frac{G h^3}{12} \quad , \quad D_2 = \frac{5}{6} G h$$

Uma vez conhecidas as componentes independentes do vector dos deslocamentos, o cálculo dos esforços é efectuado com base nas seguintes expressões:

$$m_{xx} = D_f \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] \quad ; \quad m_{yy} = D_f \left[\nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right]$$

$$m_{xy} = D_1 \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right]$$

$$v_x = D_2 \left[\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad ; \quad v_y = D_2 \left[\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

3. WAVELETS DE DUBUC-DESLAURIER

As funções de escala de Deslaurier-Dubuc [5] de ordem $N = 2L + 1$ são definidas a partir das funções de escala de Daubechies ϕ_L [6] através da seguinte igualdade:

$$\vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi_L(y)\phi_L(y-x) dy$$

Como é sabido, a função de escala ϕ_L apresenta as seguintes propriedades:

1. $\text{supp } \phi_L = [0, 2L + 1]$.
2. $\phi_L \in W^{R/2, \infty}$ para algum $R > 0$ (R é proporcional a L): $|(d^s/dx^s)\phi_L| \leq C$, para todos os inteiros s , com $0 \leq s \leq R/2$;
3. ϕ_L é ortogonal a todas as suas translações inteiras: $\int \phi_L(x)\phi_L(x-k) dx = \delta_{0k}$
4. Polinómios de grau igual ou inferior a L podem ser representados de forma exacta como combinação linear de todas as translações inteiras de ϕ_L .

Como consequência destas propriedades, a função ϑ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\text{supp } \vartheta = [-N, N]$, e $\vartheta \in W^{R, \infty}$;
2. Como consequência directa da condição de ortogonalidade da função de escala de Daubechies, a função ϑ possui a seguinte propriedade interpoladora:

$$\vartheta(n) = \int_{\mathbb{R}} \phi_L(y)\phi_L(y-n) dy = \delta_{n0}.$$

3. Polinómios de grau igual ou inferior a N podem ser representados de forma exacta como combinação linear de todas as translações inteiras de ϑ .

A função ϑ , para $N = 4$, e as suas derivadas encontram-se representadas na figura 1.

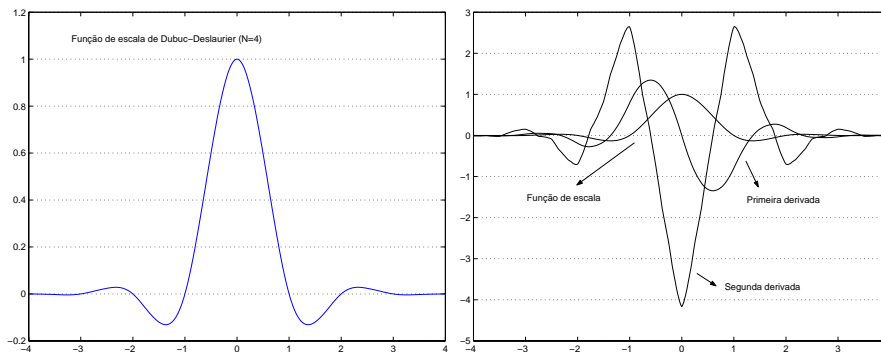


Figura 1. Função de escala de Dubuc-Deslaurier com $N = 4$ e suas derivadas

Com base na função de escala ϑ , é possível construir todo o sistema de wavelets em \mathbb{R} , e através da realização de produtos tensoriais de funções, o sistema de wavelets em \mathbb{R}^d , tal como se encontra descrito com maior detalhe em [1].

Quando se pretende construir um sistema de wavelets de Dubuc-Deslaurier no intervalo $[0, 1]$, é necessário redefinir as funções que intersectam os extremos do intervalo [7, 8]. Surgem assim três grupos de funções: as que se encontram definidas no interior do intervalo (e que correspondem exactamente às funções ϑ definidas em \mathbb{R}), as que se encontram definidas na extremidade esquerda e as que se encontram definidas na vizinhança da extremidade direita do intervalo de definição. A construção do sistema de wavelets no intervalo pressupõe ainda que se considere um grau de refinamento mínimo definido pela igualdade,

$$j \geq j_0 = \lceil \log_2(N/2) \rceil + 1$$

onde $[x]$ denota a parte inteira de x . A utilização deste grau de refinamento mínimo tem por finalidade assegurar que não existe qualquer intersecção entre as funções definidas nas extremidades esquerda e direita.

Aplicando as ideias descritas por [7, 8], é possível então possível construir as funções de escala de Dubuc-Deslaurier no intervalo $[0, 1]$. Tal como se encontra apresentado com detalhe em [2], é possível escrever:

$$\vartheta_{jk} = \vartheta(2^j x - k) + \sum_{n=-N+1}^{-1} a_{nk} \vartheta(2^j x - n), \quad k = 0, \dots, L \quad (1)$$

$$\vartheta_{jk} = \vartheta(2^j x - k), \quad k = L + 1, \dots, 2^j - L - 1, \quad (2)$$

$$\vartheta_{jk} = \vartheta(2^j x - k) + \sum_{n=2^j+1}^{2^j+N-1} b_{nk} \vartheta(2^j x - n), \quad k = 2^j - L, \dots, 2^j, \quad (3)$$

onde os coeficientes a_{nk} e b_{nk} são definidos por:

$$a_{nk} = l_{jk}^1(n2^{-j}), \quad b_{nk} = l_{jk}^2(n2^{-j}),$$

e onde l_{jk}^1 e l_{jk}^2 representam os polinómios interpoladores de Lagrange de grau L , definidos respectivamente por:

$$l_{jk}^1 = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^L \frac{x - i2^{-j}}{k2^{-j} - i2^{-j}}, \quad l_{jk}^2 = \prod_{\substack{i=2^j-L \\ i \neq k}}^{2^j} \frac{x - i2^{-j}}{k2^{-j} - i2^{-j}}.$$

É importante verificarr que os coeficientes a_{nk} e b_{nk} dependem do valor do parâmetro de escala, j .

A decomposição *multiresolução* no intervalo $[0, 1]$ pode então ser definida com base na definição da sequência de espaços $V_j = \text{span} \langle \vartheta_{jk}, k = 0, \dots, 2^j \rangle \subset L^2(0, 1)$. Saliente-se que na base de funções de escala considerada para o espaço V_j , existem 2^j funções.

A definição de uma base de funções de escala no domínio bidimensional $[0, 1]^2$ pode ser efectuada se se definirem produtos tensoriais de funções envolvendo as funções definidas no intervalo $[0, 1]$. As funções de escala bidimensionais, $\vartheta_{j,\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in G_j = \{0, \dots, 2^j\}^2$

são então definidas por

$$\vartheta_{j,\mathbf{k}} = \vartheta_{jk_1} \otimes \vartheta_{jk_2}$$

Na definição de uma análise multiresolução, a sequência de espaços \mathbb{V}_j é então definida da seguinte forma:

$$\mathbb{V}_j = \text{span} \langle \vartheta_{j,\mathbf{k}}, \mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \{0, \dots, 2^j\}^2 \rangle$$

As wavelets que permitem gerar os espaços complementares \mathbb{W}_j são definidas pelas igualdades

$$\psi_{j,\mathbf{k}}^{(1,0)} = \vartheta_{j+1,2k_1-1} \otimes \vartheta_{j,2k_2} \quad (4)$$

$$\psi_{j,\mathbf{k}}^{(0,1)} = \vartheta_{j,2k_1} \otimes \vartheta_{j+1,2k_2-1} \quad (5)$$

$$\psi_{j,\mathbf{k}}^{(1,1)} = \vartheta_{j+1,2k_1-1} \otimes \vartheta_{j+1,2k_2-1} \quad (6)$$

Os pontos de colocação, correspondendo às funções de escala e às wavelets, são definidos respectivamente por:

$$\zeta_{j,\mathbf{k}} = (k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j}), \quad \xi_{j,\mathbf{k}}^{(1,0)} = ((2k_1 - 1) 2^{-(j+1)}, k_2 2^{-j}),$$

$$\xi_{j,\mathbf{k}}^{(0,1)} = (k_1 2^{-j}, (2k_2 - 1) 2^{-(j+1)}), \quad \xi_{j,\mathbf{k}}^{(1,1)} = ((2k_1 - 1) 2^{-(j+1)}, (2k_2 - 1) 2^{-(j+1)}).$$

Para facilitar a apresentação, utiliza-se a seguinte notação compacta para os índices: dados $\lambda = (\eta, j, \mathbf{k})$ com $\eta \in \Xi = \{0, 1\}^2 \setminus \{0, 0\}$, $j \geq j_0$, e \mathbf{k} tal que $\xi_{j,\mathbf{k}}^\eta \in [0, 1]^2$, define-se

$$\psi_\lambda = \psi_{j,\mathbf{k}}^\eta, \quad \xi_\lambda = \xi_{j,\mathbf{k}}^\eta.$$

Qualquer função contínua $f \in C^0([0, 1]^2)$ pode ser então expressa na forma

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \{0, \dots, 2^{j_0}\}^2} \beta_{j_0 \mathbf{k}} \vartheta_{j_0 \mathbf{k}} + \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \psi_\lambda,$$

com

$$\Lambda = \{(\eta, j, \mathbf{k}), \eta \in \Xi, j \geq j_0, \mathbf{k} \text{ tal que } \xi_{j,\mathbf{k}}^\eta \in [0, 1]^2\}$$

Pode ser demonstrado [2] que na expansão definida pela igualdade anterior, as funções de escala são responsáveis pela representação de f com um determinado grau de refinamento, e as wavelets permitem definir o *detalhe* que é necessário adicionar para se recuperar a informação a um grau de refinamento superior. Desta forma, o valor absoluto dos coeficientes α_λ fornece uma informação precisa sobre a zona do domínio onde a aproximação actual precisa ainda de ser melhorada.

4. DESCRIÇÃO DA TÉCNICA DE COLOCAÇÃO

Vamos agora descrever como o sistema de wavelets apresentado na secção anterior pode ser aplicado no desenvolvimento de um método de colocação para a análise elástica linear de problemas de placas e lajes de Reissner-Mindlin. Para permitir um refinamento adaptativo, esta técnica de colocação deve permitir a consideração de distribuições não-uniformes de pontos de colocação diádicos.

Para cada subconjunto finito $\Lambda_h \subset \Lambda$ do conjunto de índices Λ , é possível definir a seguinte malha não-uniforme de pontos de colocação diádicos, G_{Λ_h}

$$G_{\Lambda_h} := \{\zeta_{j_0, \mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} \in \{0, \dots, 2^{j_0}\}^2\} \cup \{\xi_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda_h\}.$$

Por forma a assegurar um grau de aproximação mínimo, assume-se que tal conjunto conterá uma malha uniforme de pontos de colocação diádicos com o espaçamento dado por 2^{-j_0} . O espaço gerado pelas funções de escala e wavelets associadas a G_{Λ_h} será denotado no seguimento por

$$V_{\Lambda_h} = V_{j_0} \oplus \text{span} \langle \psi_\lambda, \lambda \in \Lambda_h \rangle$$

Por forma a se poder ter em conta as condições de fronteira, é conveniente sub-dividir os pontos de colocação em três conjuntos distintos; os que pertencem ao interior do domínio, os que se situam sobre a fronteira cinemática (fronteira de Dirichlet) e os que se situam na fronteira estática (fronteira de Neumann). Desta forma, pode escrever-se:

$$G_{\Lambda_h} = G_{\Lambda_h}^{(i)} \cup G_{\Lambda_h}^{(N)} \cup G_{\Lambda_h}^{(D)}$$

com

$$G_{\Lambda_h}^{(i)} = G_{\Lambda_h} \cap]0, 1[^2, \quad G_{\Lambda_h}^{(N)} = G_{\Lambda_h} \cap \Gamma_\sigma, \quad G_{\Lambda_h}^{(D)} = G_{\Lambda_h} \cap \Gamma_u.$$

O **Problema 1** e o **Problema 2** podem então ser discretizados da seguinte forma:

Dado $\Lambda_h \subset \Lambda$, determinar $\mathbf{u} \in V_{\Lambda_h}$ de tal forma que

$$\mathcal{A}\mathbf{u}_h(p) = f(p) \quad \text{para todos os pontos } p \in G_{\Lambda_h}^{(i)} \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_h(p) = g(\mathbf{x}_\lambda) \quad \text{para todos os pontos } p \in G_{\Lambda_h}^{(D)} \quad (8)$$

$$\mathcal{B}\mathbf{u}_h(p) = \mathbf{t}(p) \quad \text{para todos os pontos } p \in G_{\Lambda_h}^{(N)} \quad (9)$$

5. ALGORITMO ADAPTATIVO

O algoritmo adaptativo utilizado encontra-se descrito com todo o detalhe em [1]. De uma forma bastante simplista, pode dizer-se que a análise adaptativa permite determinar iterativamente um conjunto de malhas que fornecem soluções cada vez mais precisas para \mathbf{u} , utilizando sempre a solução actual em cada uma das iterações para se identificar uma melhor malha não-uniforme a ser utilizada na iteração seguinte.

Tal como descrito em detalhe nas referências [1, 2, 9, 10, 11], a identificação da região do domínio onde se deve refinar a malha através da consideração de wavelets com grau de refinamento superior, é efectuada com base nos valores dos coeficientes α_λ , os quais definem o *peso* do detalhe a considerar para se conseguir representar a solução com maior precisão.

A maior vantagem do processo de refinamento descrito reside na sua enorme simplicidade. Em particular, não há necessidade de se efectuar o cálculo de quaisquer grandezas adicionais; a decisão de refinar a solução é tomada com base apenas no valor dos coeficientes envolvidos na aproximação. Para além disto, como a discretização não é baseada em quaisquer técnicas de triangulação, adicionar ou remover um ponto de colocação não apresenta quaisquer dificul-

dades nem tem influência nos restantes pontos de colocação considerados, uma vez que não há qualquer constrangimento de conformidade a respeitar.

Para se definir a técnica de refinamento adaptativo, considere-se agora o caso das placas (a generalização para o caso das lajes espessas é imediato). Considere-se que no passo n , para uma dada malha não-uniforme de pontos de colocação G^n , se obteve a solução aproximada \mathbf{u}_n com os seguintes coeficientes:

$$\mathbf{w}(u_x^n) = \{\{c_{j_0, \mathbf{k}}^{x, n}\}, \{e_\lambda^{x, n}, \lambda \in \Lambda_n\}\}, \quad \mathbf{w}(u_y^n) = \{\{c_{j_0, \mathbf{k}}^{y, n}\}, \{e_\lambda^{y, n}, \lambda \in \Lambda_n\}\}$$

Para se determinar a próxima malha a utilizar, G^{n+1} , é necessário remover os pontos desnecessários e adicionar outros nas regiões onde a aproximação ainda não atingiu o grau de refinamento desejado. Para tal efeito define-se para cada ponto da malha, $\lambda = (k_1, \dots, k_d)/2^j$, o conjunto de pontos vizinhos, \mathcal{U}_λ , definido por:

$$\mathcal{U}_\lambda = [0, 1]^2 \cap \{x_k^{j+1}, k = (2k_1 + \eta_1, \dots, 2k_d + \eta_d), \eta_i = -1, 0, 1\},$$

A próxima malha não-uniforme a utilizar é definida pela expressão [1, 2]

$$\Lambda_{n+1} = \{\lambda : \max\{|e_\lambda^{x, n}|, |e_\lambda^{y, n}|\} > \delta_r / (2^{j_s} j^2)\} \cup_{\{\lambda : \max\{|e_\lambda^{x, n}|, |e_\lambda^{y, n}|\} > \delta_a / 2^{j_s}\}} \mathcal{U}_\lambda.$$

6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

6.1. Análise de placas

Para ilustrar a aplicação da técnica de colocação adaptativa atrás descrita, são analisadas as estruturas representadas nas figuras 2, 3 e 4.

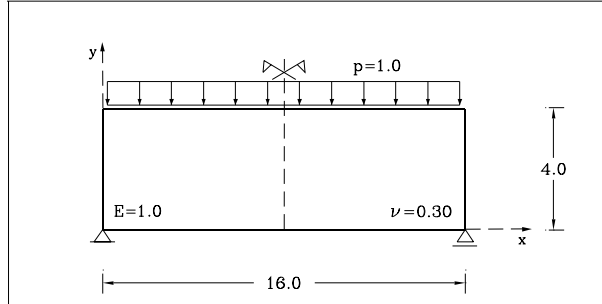


Figura 2. Viga simplesmente apoiada

Considere-se primeiro a viga simplesmente apoiada representada na figura 2. Devido às condições de simetria existentes, apenas metade da estrutura é analisada. Na aproximação dos campos de deslocamentos utiliza-se uma base de wavelets de Dubuc-Deslaurier com $N = 4$, $j_0 = 3$ e $j_{max} = 4$. Esta discretização envolve um total de 289 pontos de colocação e 578 graus de liberdade. Na resolução do sistema de equações utilizou-se uma rotina da biblioteca *HSL* [13] que aplica um método directo para o efeito. O tempo de CPU envolvido na análise foi inferior a um segundo, tendo sido utilizado um processador AMD Athlon.

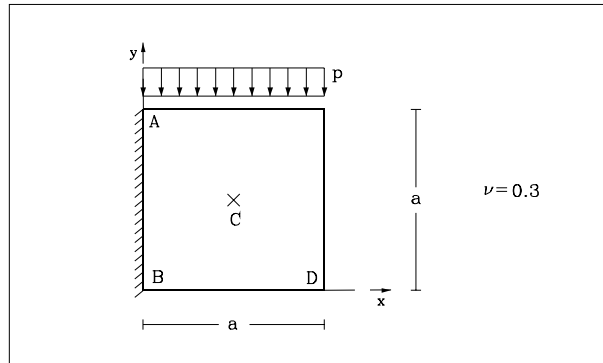


Figura 3. Consola quadrada

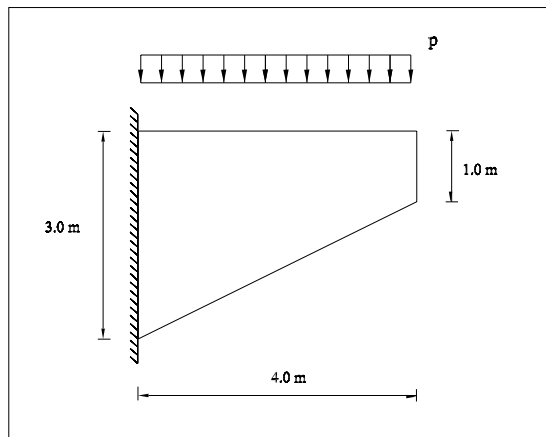


Figura 4. Consola curta

Na figura 5 apresentam-se os campos de tensões obtidos com recurso a esta discretização. A solução é suficientemente regular em todo o domínio para que não se justifique neste caso a adopção de uma técnica de refinamento adaptativo. A solução obtida com a malha regular é praticamente coincidente com a solução exacta, tal como se encontra ilustrado nos gráficos apresentados na figura 6, onde se apresentam as distribuições das componentes independentes do tensor das tensões ao longo da secção $x = 4 \text{ m}$. A solução exacta é obtida tendo em conta a informação referida em [3].

Considere-se agora a análise da consola quadrada representada na figura 3. Na análise em regime elástico linear desta estrutura surgem singularidades nos campos de tensões nos cantos do bordo encastrado.

Numa primeira etapa, analisa-se a consola considerando-se apenas malhas uniformes. Na tabela 1, listam-se os parâmetros que permitem caracterizar cada uma das discretizações adoptadas. Em qualquer um dos casos utilizaram-se funções com $N = 4$ e um grau de refinamento mínimo $j_0 = 3$. Na tabela 1, para além do número de pontos de colocação, n_{grid} , lista-se o número de graus de liberdade envolvidos na aproximação do campo de deslocamentos, n_{dof} , e

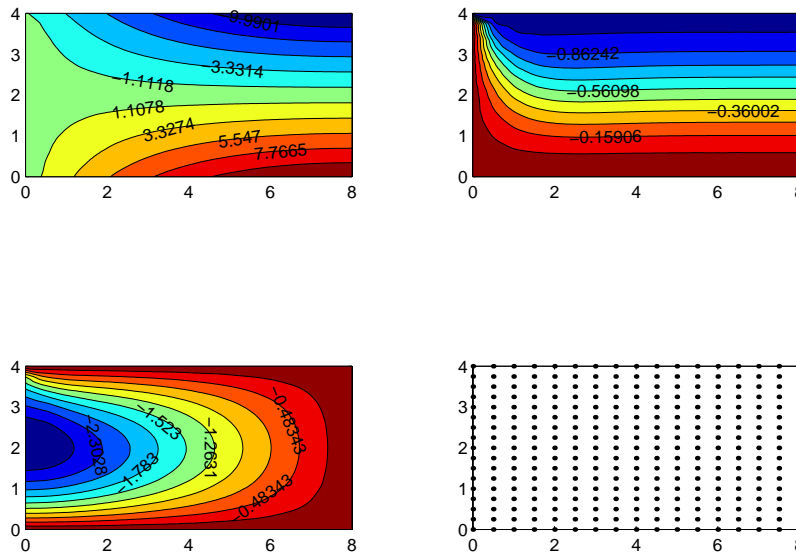


Figura 5. Viga simplesmente apoiada; solução com uma malha uniforme

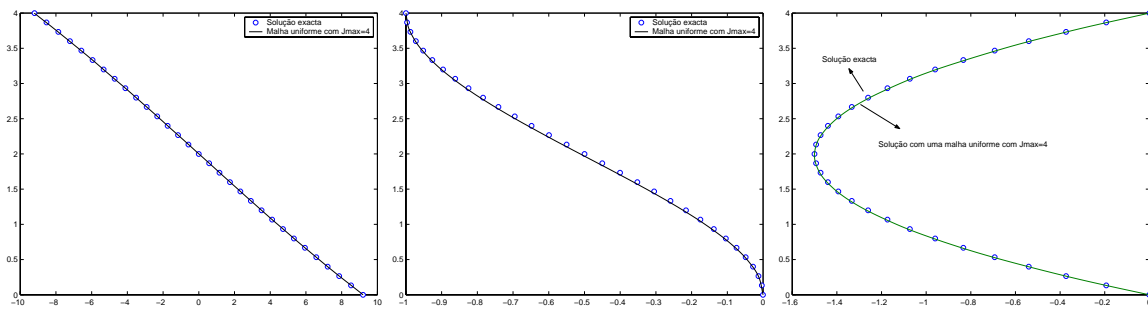


Figura 6. Viga simplesmente apoiada; diagramas de tensões ao longo de $x = 4$

o tempo de CPU necessário à determinação da solução, T_{CPU} .

Na figura 7 apresenta-se a solução aproximada obtida com a discretização A. Estão nessa figura representadas as componentes independentes do tensor das tensões e a deformada da estrutura. Esta representação tem por base a utilização do "package" gráfico *Janela* [12].

A solução representada na figura 8 foi obtida através da utilização de um programa comercial de elementos finitos, o COSMOS/M [14]. Esta solução foi obtida com uma malha uniforme de 900 elementos isoparamétricos de 4 nós, à qual está associado um total de 1860 graus de liberdade. Os campos de tensões estão representados tal como resultam da solução aproximada, sem se ter efectuado quaisquer operações de *adoçamento* da solução.

Comparando as soluções apresentadas nas figuras 7 e 8, é possível comprovar qualitativamente que a técnica de colocação baseada na utilização das wavelets interpoladores de Dubuc-Deslaurier permite obter soluções já bastante precisas, mesmo quando a aproximação envolve um pequeno número de graus de liberdade.

Discretização	N	j_0	j_{max}	n_{grid}	n_{dof}	T_{CPU}
A	4	3	3	81	162	0.04
B	4	3	4	289	578	0.72
C	4	3	5	1089	2178	52.63

Cuadro 1. Malhas uniformes utilizadas na resolução da consola quadrada

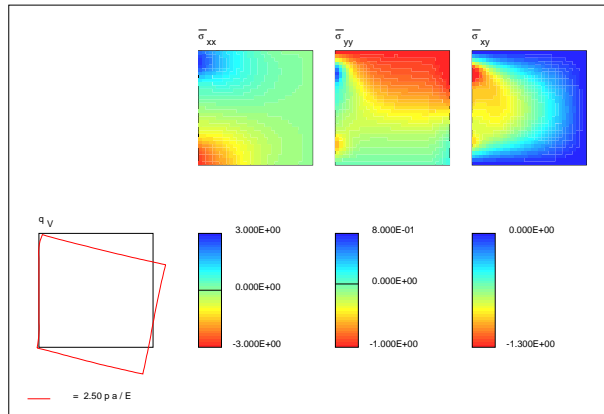


Figura 7. Consola quadrada; solução com a discretização A

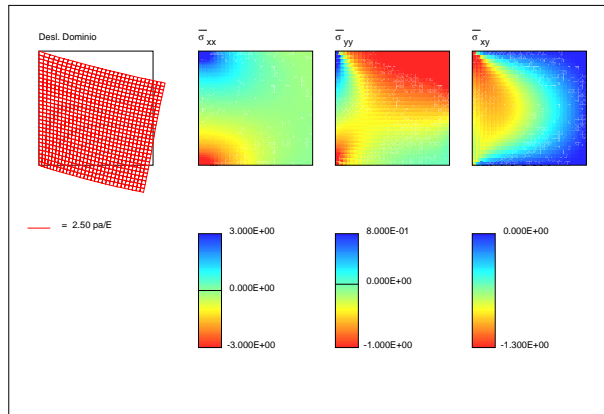


Figura 8. Consola quadrada; solução com um modelo de elementos finitos

À medida que se incrementa o número de pontos de colocação considerados na discretização, mais precisa é a solução aproximada resultante. Esta ideia é confirmada pela análise da figura 9, onde se apresenta a evolução do erro da energia de deformação com o aumento do número de graus de liberdade considerados. A solução obtida com a discretização C encontra-se representada na figura 10.

Vamos agora verificar o que acontece quando se aplica a técnica de refinamento adaptativa aqui em análise. Para se obter a solução inicial, utiliza-se a discretização B. Depois, é definida

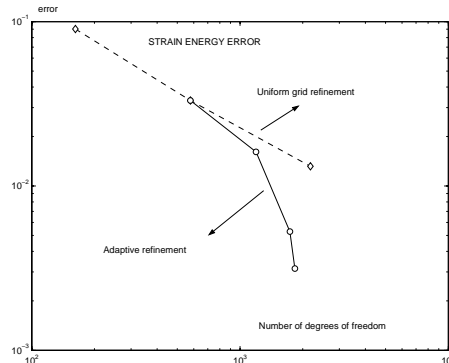


Figura 9. Evolução do erro da energia de deformação; análise adaptativa

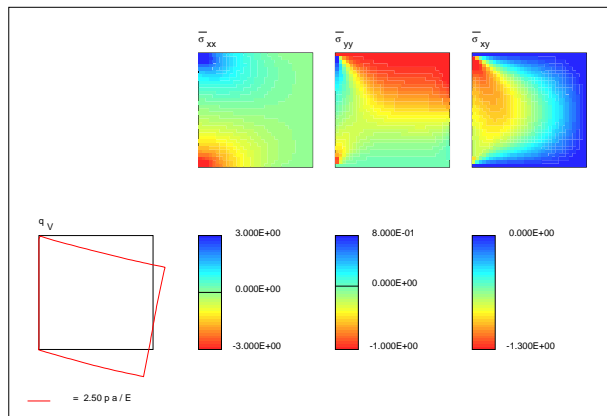


Figura 10. Consola quadrada; solução com a discretização C

de forma automática uma sequência de 4 malhas adaptativas não-uniformes. Cada uma destas malhas encontra-se ilustrada na figura 11. Os parâmetros que controlam a definição da malha seguinte são dados pelas igualdades $\delta_a = 10^{-5}$ e $\delta_r = 10^{-6}$.

Importante é verificar a vantagem associada à utilização desta técnica. A análise da figura 9 permite verificar de imediato que a análise adaptativa permite, para um mesmo número de graus de liberdade, obter soluções significativamente mais precisas.

Outro aspecto a ter em conta diz respeito à localização dos pontos de colocação, a qual é determinada de forma automática, tal como anteriormente foi explicado. Se se analisar essa distribuição na malha final, verifica-se que existe uma grande concentração de pontos junto aos cantos do bordo encastrado, ou seja, junto aos pontos onde se sabe existirem singularidades no campo de tensões.

Na tabela 2 apresenta-se, para cada uma das malhas representadas na figura 11, o grau máximo de refinamento presente na solução, j_{max} , o número de pontos de colocação, n_{grid} , e o número total de graus de liberdade na aproximação.

A solução obtida com a malha final encontra-se representada na figura 12.

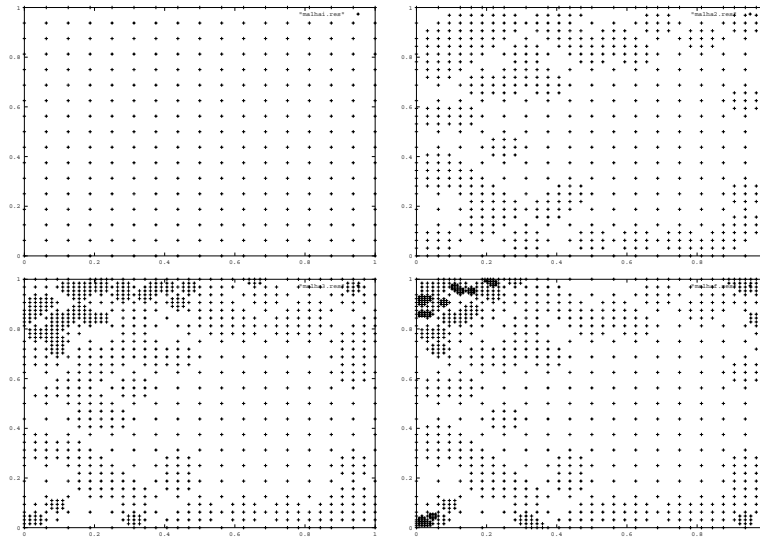


Figura 11. Sequência de malhas não-uniformes

Discr.	j_{max}	n_{grid}	n_{dof}
inicial	4	289	578
2	5	597	1194
3	6	868	1736
final	7	917	1834

Cuadro 2. Malhas não-uniformes resultantes da análise adaptativa

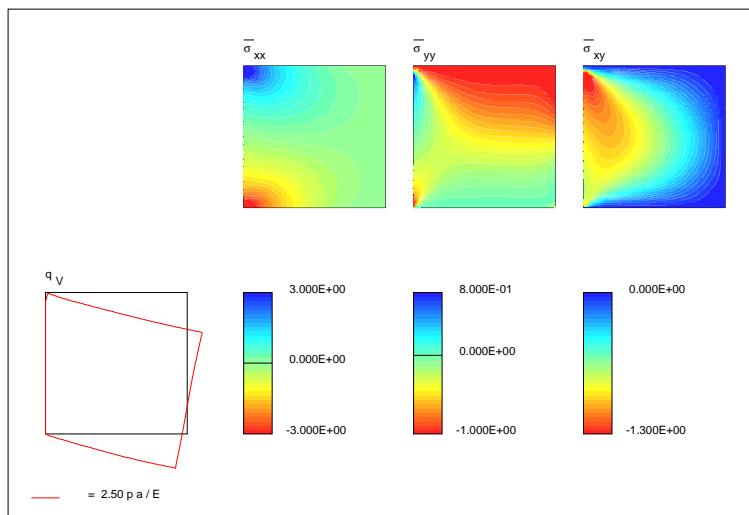


Figura 12. Consola quadrada; solução resultante da análise adaptativa

Para se conseguirem analisar estruturas com geometria não-rectangular, é necessário definir um processo de *mapeamento* que permita transformar o domínio real num elemento mestre com forma quadrangular definido no intervalo $[0, 1]^2$. A aproximação é então definida nesse elemento mestre e os operadores diferenciais presentes nas definições das equações governativas devem ser redefinidos por forma a ter em conta essa mudança de coordenadas. Este tipo de transformação encontra-se ilustrado em [1].

Na figura 13 apresenta-se a solução adaptativa obtida para a consola curta representada na figura 4. A correspondente malha final encontra-se ilustrada na figura 14. Utilizou-se na análise uma base de wavelets com $N = 4$ e $j_0 = 3$. A malha final tem um total de 892 pontos de colocação, aos quais corresponde um total de 1784 graus de liberdade. O grau de refinamento máximo atingido foi de $j_{mx} = 6$.

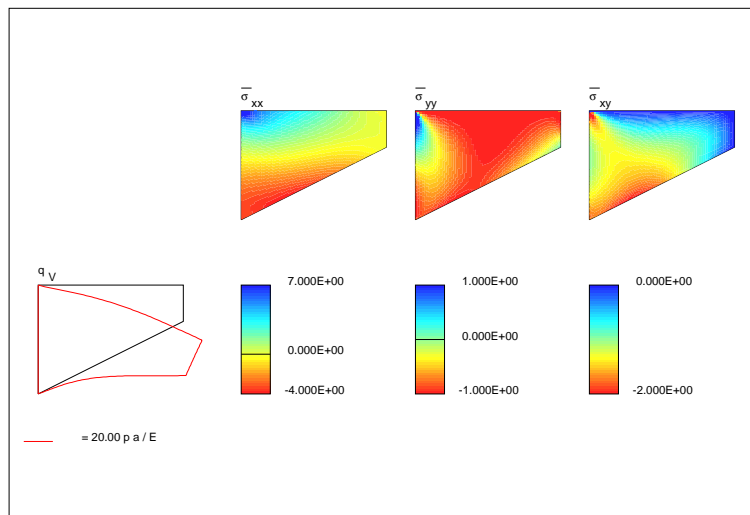


Figura 13. Consola curta; solução resultante da análise adaptativa

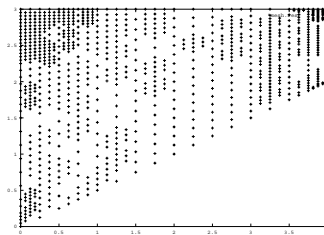


Figura 14. Consola curta; malha final

6.2. Análise de lajes de Reissner-Mindlin

Considere-se a laje rectangular simplesmente apoiada (com apoios do tipo *hard*) representada na figura 15. Tal como se encontra indicado, apenas $1/4$ da laje é analisado, tendo em

conta as condições de simetria existentes. Assume-se que $E = 30,5 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, $a = 2 \text{ m}$ e $h = 0,01 \text{ m}$.

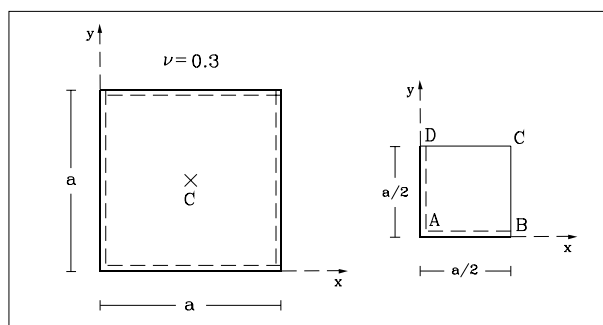


Figura 15. Consola quadrada

Na obtenção da solução representada na figura 16 considerou-se uma malha uniforme caracterizada por $N = 4$, $j_0 = 3$ e $j_{max} = 4$. Esta malha tem um total de 289 pontos de colocação e 867 graus de liberdade. Na primeira linha da figura 16 apresentam-se os dois campos de rotações, θ_x e θ_y , e o campo de deslocamentos transversais, w . Na segunda linha apresentam-se os campos de momentos flectores, m_{xx} e m_{yy} , e o campo de momentos torsores, m_{xy} . Na terceira e última linha apresentam-se os campos de esforços transversos, v_x e v_y , e a distribuição de pontos de colocação.

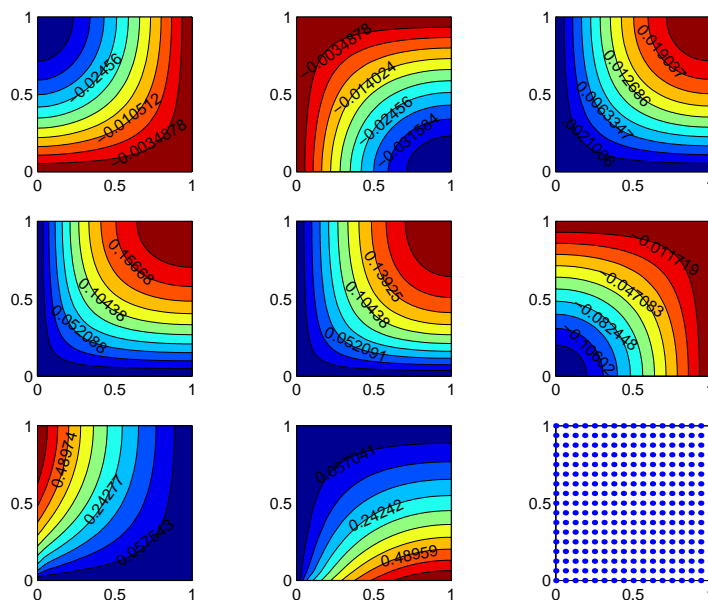


Figura 16. Laje com apoios *hard*; solução com uma malha uniforme

Tal como se pode comprovar através da análise da figura 17, onde se encontra representado o campo de deslocamentos transversais ao longo de BC, o campo de momentos flectores m_{xx}

ao longo de BC e o campo de momentos torsores m_{xy} ao longo de AB, a solução aproximada obtida é praticamente coincidente com a solução exacta.

A análise das figuras 16 e 17 permite antever que não haja a necessidade de se adoptarem técnicas adaptativas, uma vez que a solução é bastante regular, sendo portanto perfeitamente adequada a utilização de uma malha uniforme de pontos de colocação.

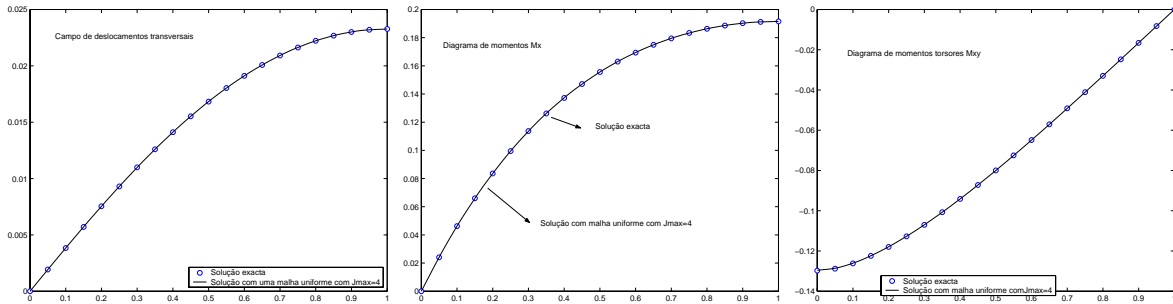


Figura 17. Laje simplesmente apoiada; solução com malha uniforme

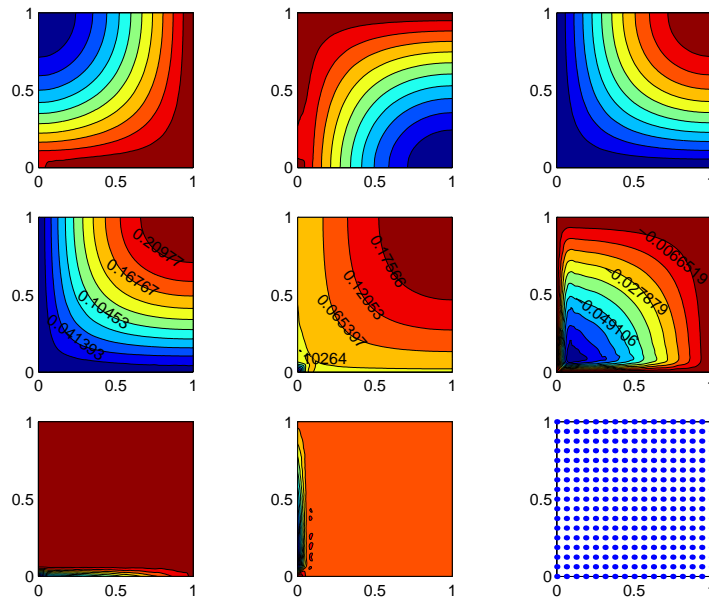


Figura 18. Laje com apoios *soft*; solução com uma malha uniforme

A conclusão anterior pode resultar substancialmente alterada se se considerar que os apoios existentes são do tipo *soft* (o que quer dizer que apenas se restringe o deslocamento transversal em todos os bordos simplesmente apoiados). Tal como se encontra representado na figura 18, a consideração deste tipo de apoio faz surgir o efeito de *boundary layer*, visível nos campos de momentos torsores e de esforços transversos.

Embora a malha uniforme com 289 pontos de colocação permita desde logo um representação bastante precisa razoável deste efeito, a obtenção de uma solução mais precisa pressupõe a aplicação da técnica de refinamento adaptativa em estudo. Obtém-se desta forma a solução final representada na figura 19.

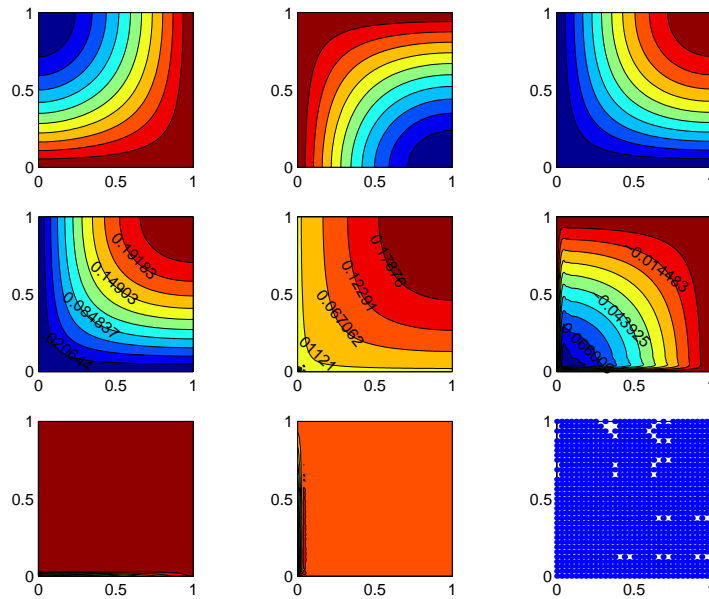


Figura 19. Laje com apoios *soft*; solução com uma malha adaptativa

A melhoria da solução é ainda visível nos gráficos apresentados na figura 20, onde se representa a distribuição de momentos torsores m_{xy} e de esforços transversos v_y ao longo do segmento de laje com $y = 0,5\text{ m}$. A análise desses gráficos permite verificar que, tal como seria de esperar, a largura do *boundary layer* tende a diminuir à medida que se refina a malha considerada na análise.

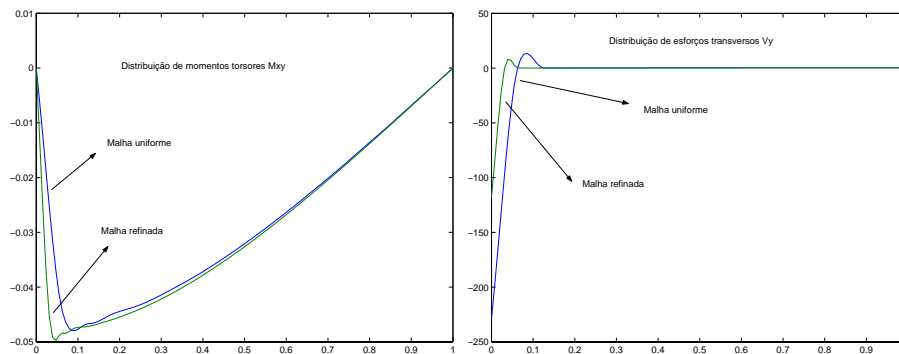


Figura 20. Viga simplesmente apoiada com apoios *soft*; campo de momentos m_{xy} e de esforços transversos v_y

7. CONCLUSÃO

Os exemplos discutidos na secção anterior permitem ilustrar as potencialidades da técnica de colocação adaptativa apresentada na resolução numérica de problemas de Mecânica dos Sólidos. No entanto, para que estes algoritmos possam vir a ser aplicados na análise de problemas mais realistas, torna-se necessário:

- Implementar um algoritmo que permita a sub-divisão do domínio em regiões. Esta generalização é essencial se se pretenderem analisar estruturas com geometrias mais complexa;
- Desenvolver um pré-condicionador eficaz, que aplicado em conjunto com o método dos gradientes conjugados e tirando partido das características do sistema de funções utilizadas como base de aproximação, permita a construção de um algoritmo robusto e eficaz para a resolução dos sistemas de equações lineares;
- Implementar técnicas eficazes de pós-processamento, baseadas em algoritmos de transformada rápida;
- Generalizar a técnica de colocação descrita por forma a tornar possível a análise de estruturas tridimensionais;
- Generalizar os algoritmos existentes por forma a tornar possível a consideração do comportamento fisicamente não-linear dos materiais estruturais.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pela Comunidade Europeia através do projecto de investigação TMR-ERBFMRXCT-98-0184, “Wavelets in Numerical Analysis and Simulation”. Foi ainda parcialmente financiado pelo ICIST através do programa PRAXIS XXI no âmbito do contrato de investigação 2/2.1/CEG/33/94.

REFERENCIAS

- [1] S. Bertoluzza, *An Adaptive Collocation Method based on Interpolating Wavelets*, in *Multi-scale Wavelet Methods for Partial Differential Equations*, edited by Dahmen, Kurdila and Oswald, Academic Press, (1997);
- [2] S. Bertoluzza e L.M. Castro, *Adaptive Wavelet Collocation for Elasticity: First Results*, preprint, IAN-CNR (Pavia, Italy), (2001);
- [3] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd edition, McGraw-Hill International Book Company, Tokyo, (1982);
- [4] A.E. Green e W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Dover Publications, Oxford University Press, New York, (1968);
- [5] G. Deslaurier e S. Dubuc, *Symmetric iterative interpolation processes*, *Constructive Approximation*, 5, (1989);
- [6] I. Daubechies, *Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets*, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 41, pp. 909-996, (1988);

- [7] Donoho, D., Interpolating Wavelet Transform, Department of Statistics, Stanford University, 1992, preprint.
- [8] A. Cohen, I. Daubechies, and P. Vial. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *ACHA*, 1:54–81, (1993).
- [9] S. Bertoluzza, J.C. Ravel, and Y. Maday. A dynamically adaptive wavelet method for solving partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (1994).
- [10] A. Cohen, W. Dahmen, and R. DeVore. Adaptive wavelet methods for elliptic operator equations – convergence rates. Technical report, IGPM - RWTH-Aachen, 1998. to appear in *Math. Comp.*
- [11] Y. Maday, V. Perrier, and J.C. Ravel. Adaptivité dynamique sur bases d’ondelettes pour l’approximation d’équations aux dérivées partielles. *C. R. Acad. Sci Paris*, 312, (Série I):405–410, 1991.
- [12] J. P. B. Moitinho de Almeida, *Janela: Uma interface gráfica destinada à aplicação em problemas de Mecânica Computacional*, Internal Report, Instituto Superior Técnico, Technical University of Lisbon, (1992);
- [13] *Harwell Subroutine Library*, Advanced Computing Department, Harwell Laboratory, Oxfordshire, (1990);
- [14] COSMOS/M, *Finite Element System*, Version 1.70, Structural Research and Analysis Corporation, (1993);