Alcuni esercizi sulle equazioni differenziali

(Le soluzioni sono alla fine)

Calcolo dell'integrale generale

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali calcolare l'insieme di tutte le possibili soluzioni. Fare inoltre la verifica, sostituendo la soluzione cercata nella equazione e verificando che l'equazione stessa è sodisfatta.

Ad esempio, per l'equazione

$$y' + 3y = 6$$

le soluzioni sono $y(x) = C\, e^{-3x} + 2$. La verifica consiste nel sostituire $y = C\, e^{-3x} + 2$ (da cui $y' = -3\, C\, e^{-3x}$) nella equazione ricavando

$$-3\, C\, e^{-3x} + 3\, (C\, e^{-3x} + 2) = 6$$

Equazioni lineari del primo ordine

- E0 $\quad y' - 2y = 8$
- E1 $\quad y' - xy = 0$
- E2 $\quad y' - \dfrac{1}{x} y = 0$
- E3 $\quad y' + \dfrac{1}{x} y = 2$
- E4 $\quad y' + \dfrac{1}{x} y = 3x$
- E5 $\quad y' - xy = 2x$
- E6 $\quad y' + 5y = 26 \sin x$
- E7 $\quad y' + 5y = 26 \cos x$
- E8 $\quad y' - 7y = -8e^{3x}$
- E9 $\quad y' + 8y = 6e^{-2x}$

Equazioni lineari del secondo ordine omogenee

- F0 $\quad y'' - 2y' - 3y = 0$
- F1 $\quad y'' + 4y = 0$
- F2 $\quad y'' - 2y' = 0$
- F3 $\quad y'' - 2y' + y = 0$

- F4 $\quad y'' + 2y' + y = 0$
- F5 $\quad y'' - 4y' + 5y = 0$
- F6 $\quad y'' + 2y' + 2y = 0$
- F7 $\quad y'' + 9y = 0$
- F8 $\quad y'' - 3y' + 2y = 0$
- F9 $\quad y'' + 3y' + 2y = 0$

Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee

- F0N $\quad y'' - 2y' - 3y = 6$
- F1N $\quad y'' + 4y = 4$
- F2N $\quad y'' - 2y' = 2$
- F3N $\quad y'' - 2y' + y = x$
- F4N $\quad y'' + 2y' + y = -3\cos(2x) - 4\sin(2x)$
- F5N $\quad y'' - 4y' + 5y = 10$
- F6N $\quad y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$
- F7N $\quad y'' + 9y = 6\cos(3x)$
- F8N $\quad y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$
- F9N $\quad y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

Problemi ai valori iniziali

Per ciascuno dei seguenti problemi calcolare l' unica soluzione che sodisfa sia l'equazione sia le condizioni iniziali. Fare la verifica, sostituendo la soluzione cercata nella equazione e nelle condizioni iniziali e verificando che entrambe sono sodisfatte.

Ad esempio, per il problema

$$y' + 3y = 6 \qquad \text{con} \qquad y(0) = 4$$

la soluzione è $y(x) = 2\,e^{-3x} + 2$. La verifica consiste nel sostituire $y = 2\,e^{-3x} + 2$ (da cui $y' = -6\,e^{-3x}$) nella equazione ricavando

$$-6\,e^{-3x} + 3\,(2\,e^{-3x} + 2) = 6$$

e nel sostituire $y = 2\,e^{-3x} + 2$ nella condizione iniziale ricavando

$$y(0) = 2 + 2 = 4.$$

Fatto questo, eseguire il calcolo finale richiesto (che dovrebbe dare un risultato intero). Nell'esempio sopra riportato, se viene richiesto *Allora* $\ln(y(2) - 2) - \ln(2)$ *vale:* bisognerà calcolare $\ln(2\,e^{-6}) - \ln(2) = \ln(e^{-6}) = -6$, che sarà la risposta finale. In alcuni casi, la risposta finale potrebbe essere ottenibile anche senza calcolare la soluzione $y(x)$. Vediamo se trovate quali sono questi casi...

Equazioni lineari del primo ordine

- E0P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - 2y = 8$ con $y(0) = 0$. Allora $\ln\left(\frac{y(2)+4}{4}\right)$ vale:
- E1P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - xy = 0$ con $y(0) = 1$. Allora $2\ln(y(3))$ vale:
- E2P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - \dfrac{1}{x}y = 0$ con $y(1) = 2$. Allora $y(2)$ vale:
- E3P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + \dfrac{1}{x}y = 2$ con $y(1) = 3$. Allora $2y(4)$ vale:
- E4P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + \dfrac{1}{x}y = 3x$ con $y(1) = 5$. Allora $2y(2)$ vale:
- E5P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - xy = 2x$ con $y(0) = -1$. Allora $\ln(y(2) + 2)$ vale:
- E6P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + 5y = 26\sin x$ con $y(0) = -1$. Allora $y(\pi)$ vale:

- E7P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + 5y = 26\cos x$ con $y(0) = 6$. Allora $y'(0)$ vale:

- E8P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - 7y = -8e^{3x}$ con $y(0) = 3$. Allora $y'(0) - y(0)$ vale:

- E9P Sia $y(x)$ la soluzione di $y' + 8y = 6e^{-2x}$ con $y(0) = 3$. Allora $y'(0) + 8y(0)$ vale:

Equazioni lineari del secondo ordine omogenee

- F0P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' - 3y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$. Allora $\ln(y(3))$ vale:

- F1P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 4y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 4$. Allora $y(\pi)$ vale:

- F2P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' = 0$ con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 2$. Allora $\ln(y'(1)) - \ln(2)$ vale:

- F3P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' + y = 0$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1/e$. Allora $3(y(1))$ vale:

- F4P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 2y' + y = 0$ con $y(0) = 2$ e $y'(0) = -3$. Allora $5\ln(y(1))$ vale:

- F5P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 4y' + 5y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. Allora $y(\pi)y(-\pi)$ vale:

- F6P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 2y' + 2y = 0$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Allora $y''(\pi/4)/y(\pi/4)$ vale:

- F7P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 9y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Allora $2y(2\pi) + y(\pi)$ vale:

- F8P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 3y' + 2y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. Allora $y(1) - (y(1/2))^2$ vale:

- F9P Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 3y' + 2y = 0$ $y(0) = 3$ e $y'(0) = -6$. Allora $y(2)y(-2)$ vale:

Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee

- F0Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' - 3y = 6$ con $y(0) = -2$ e $y'(0) = 0$. Allora $2y(3)$ vale:
- F1Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 4y = 4$ con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$. Allora $y(\pi/2)$ vale:
- F2Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' = 2$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$. Allora $y(2)$ vale:
- F3Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 2y' + y = x$ con $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$. Allora $y(1)$ vale:
- F4Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 2y' + y = -3\cos(2x) - 4\sin(2x)$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Allora $2y(3\pi)$ vale:
- F5Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 4y' + 5y = 10$ con $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$. Allora $2y(7\pi/4)$ vale:
- F6Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y''+2y'+2y = 4\cos(2x)-2\sin(2x)$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$. Allora $2y(5\pi/4)$ vale:
- F7Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 9y = 6\cos(3x)$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = -3$. Allora $y(1)$ vale:
- F8Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 6$. Allora $y''(0)$ vale:
- F9Q Sia $y(x)$ la soluzione di $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Allora $y(3)y(-3)$ vale:

SOLUZIONI (sperando che siano tutte giuste: sono 60...)

Equazioni lineari del primo ordine

- E0 $y(x) = C\,e^{2x} - 4$
- E1 $y(x) = C\,e^{x^2/2}$
- E2 $y(x) = C\,x$
- E3 $y(x) = \dfrac{C}{x} + x$
- E4 $y(x) = \dfrac{C}{x} + x^2$
- E5 $y(x) = C\,e^{x^2/2} - 2$
- E6 $y(x) = C\,e^{-5x} + 5\mathrm{sin}x - \mathrm{cos}x$
- E7 $y(x) = C\,e^{-5x} + \mathrm{sin}x + 5\mathrm{cos}x$
- E8 $y(x) = C\,e^{7x} + 2e^{3x}$
- E9 $y(x) = C\,e^{-8x} + e^{-2x}$

Equazioni lineari del secondo ordine omogenee

- F0 $y(x) = C_1\,e^{3x} + C_2\,e^{-x}$
- F1 $y(x) = C_1\,\cos(2x) + C_2\,\sin(2x)$
- F2 $y(x) = C_1\,e^{2x} + C_2$
- F3 $y(x) = C_1\,e^{x} + C_2\,x\,e^{x}$
- F4 $y(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,x\,e^{-x}$
- F5 $y(x) = e^{2x}(C_1\,\cos x + C_2 \sin x)$
- F6 $y(x) = e^{-x}(C_1\,\cos x + C_2 \sin x)$
- F7 $y(x) = C_1\,\cos(3x) + C_2\,\sin(3x)$
- F8 $y(x) = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x}$
- F9 $y(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-2x}$

Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee

- F0N $y(x) = C_1\,e^{3x} + C_2\,e^{-x} - 2$
- F1N $y(x) = C_1\,\cos(2x) + C_2\,\sin(2x) + 1$

- F2N $\quad y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2 - x$
- F3N $\quad y(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, x\, e^{x} + x + 2$
- F4N $\quad y(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, x\, e^{-x} + \cos(2x)$
- F5N $\quad y(x) = e^{2x}(C_1\, \cos x + C_2 \sin x) + 2$
- F6N $\quad y(x) = e^{-x}(C_1\, \cos x + C_2 \sin x) + \sin(2x)$
- F7N $\quad y(x) = C_1\, \cos(3x) + C_2\, \sin(3x) + x \sin(3x)$
- F8N $\quad y(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x} + e^{3x}$
- F9N $\quad y(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{-2x} + xe^{-x}$

Problemi ai valori iniziali

Problemi per equazioni lineari del primo ordine

- E0P $\quad y(x) = 4\, e^{2x} - 4$. Quindi il risultato è 4.
- E1P $\quad y(x) = e^{x^2/2}$. Quindi il risultato è 9.
- E2P $\quad y(x) = 2x$. Quindi il risultato è 4.
- E3P $\quad y(x) = \dfrac{2}{x} + x$. Quindi il risultato è 9.
- E4P $\quad y(x) = \dfrac{4}{x} + x^2$. Quindi il risultato è 12.
- E5P $\quad y(x) = e^{x^2/2} - 2$. Quindi il risultato è 2.
- E6P $\quad y(x) = 5 \sin x - \cos x$. Quindi il risultato è 1.
- E7P $\quad y(x) = e^{-5x} + \sin x + 5 \cos x$. Quindi il risultato è -4. Notare che, senza calcolare esplicitamente la $y(x)$, dalla equazione calcolata in 0 si ha $y'(0) + 5y(0) = 26 \cos(0)$. Sapendo che $y(0)$ vale 6 si ricava $y'(0) = 26 - 30 = -4$.... Perché mi sembra di sentire dei muggiti di sorpresa?
- E8P $\quad y(x) = e^{7x} + 2e^{3x}$. Quindi il risultato è 10. Anche qui non era necessario, per arrivare al risultato, calcolare la $y(x)$. Dalla equazione, e dalla condizione $y(0) = 3$ si ricava infatti $y'(0) - 21 = -8$ che fornisce subito $y'(0) = 13$.
- E9P $\quad y(x) = 2e^{-8x} + e^{-2x}$. Quindi il risultato è 6. Questo era quasi un insulto alla intelligenza. Infatti l'equazione mi dice che $y'(x) + 8y(x)$ fa *sempre* $6\, e^{-2x}$. In particolare, per $x = 0$, fa 6. Muggiti di disappunto...

Problemi per equazioni lineari del secondo ordine omogenee

- F0P $y(x) = e^{-x}$. Quindi il risultato vale -3.
- F1P $y(x) = \cos(2x) + 2\sin(2x)$. Quindi il risultato vale 1.
- F2P $y(x) = e^{2x} + 2$. Quindi il risultato vale 2.
- F3P $y(x) = \dfrac{x\,e^{x}}{e}$. Quindi il risultato vale 3.
- F4P $y(x) = 2e^{-x} - xe^{-x}$. Quindi il risultato vale -5.
- F5P $y(x) = e^{2x}\cos x$. Quindi il risultato vale 1.
- F6P $y(x) = e^{-x}\sin x$. Quindi il risultato vale -2.
- F7P $y(x) = \cos(3x)$. Quindi il risultato vale 1.
- F8P $y(x) = e^{2x}$. Quindi il risultato vale 0.
- F9P $y(x) = 3e^{-2x}$. Quindi il risultato vale 9.

Problemi per equazioni lineari del secondo ordine non omogenee

- F0Q $y(x) = -2$. Quindi il risultato vale -4.
- F1Q $y(x) = 2\cos(2x) + 1$. Quindi il risultato vale -1.
- F2Q $y(x) = 1 - x$. Quindi il risultato vale -1.
- F3Q $y(x) = x + 2$. Quindi il risultato vale 3.
- F4Q $y(x) = \cos(2x)$. Quindi il risultato vale 2.
- F5Q $y(x) = 2$. Quindi il risultato vale 4.
- F6Q $y(x) = \sin(2x)$. Quindi il risultato vale 2.
- F7Q $y(x) = -\sin(3x) + x\sin(3x)$. Quindi il risultato vale 0.
- F8Q $y(x) = e^{x} + e^{2x} + e^{3x}$. Quindi il risultato vale 14. Si noti che l'equazione calcolata in zero fornisce $y''(0) - 3y'(0) + 2y(0) = 2$. Usando $y(0) = 3$ e $y'(0) = 6$ si ottiene $y''(0) = 2 + 3 \times 6 - 2 \times 3 = 14$.
- F9Q $y(x) = xe^{-x}$. Quindi il risultato vale -9.