

Alcuni esercizi sulle equazioni differenziali a variabili separabili
(Le soluzioni sono alla fine)

Calcolo dell'integrale generale

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali calcolare l'insieme di tutte le possibili soluzioni. Fare inoltre la **verifica**, sostituendo la soluzione cercata nella equazione e verificando che l'equazione stessa è soddisfatta.

Ad esempio, per l'equazione

$$y' = -3y$$

le soluzioni sono $y(x) = C e^{-3x}$. La verifica consiste nel sostituire $y = C e^{-3x}$ (da cui $y' = -3C e^{-3x}$) nella equazione ricavando

$$-3C e^{-3x} = -3(C e^{-3x})$$

Equazioni che sono lineari in y

NB: Le equazioni sono però da trattare come equazioni a variabili separabili. Ovviamente, le due strategie di risoluzione (trattandole come equazioni lineari o come equazioni a variabili separabili) possono essere usate *entrambe* e utilizzate una come verifica dell'altra.

- E0 $y' = -xy$
- E1 $y' = xy$
- E2 $y' = \frac{1}{x}y$
- E3 $y' = -\frac{1}{x}y$
- E4 $y' = -\frac{1}{x^2}y$

Equazioni a variabili separabili autonome

- F0 $y' = y^2$
- F1 $y' = 1 + y^2$
- F2 $y' = \cos^2 y$
- F3 $y' = y \lg y$
- F4 $y' = \sqrt{1 - y^2}$

Equazioni a variabili separabili generali

- G0 $y' = xy^2$
- G1 $y' = x^2y^2$
- G2 $y' = x(1 + y^2)$
- G3 $y' = x^3(1 + y^2)$
- G4 $y' = x\cos^2y$
- G5 $y' = e^x\cos^2y$
- G6 $y' = xy \lg y$
- G7 $y' = \frac{y \lg y}{x}$
- G8 $y' = x\sqrt{1 - y^2}$
- G9 $y' = \frac{1}{x}\sqrt{1 - y^2}$

Problemi ai valori iniziali

Per ciascuno dei seguenti problemi calcolare l' **unica soluzione** che soddisfa sia l'equazione sia le condizioni iniziali. Fare la **verifica**, sostituendo la soluzione cercata nella equazione e nelle condizioni iniziali e verificando che entrambe sono soddisfatte.

Ad esempio, per il problema

$$y' = -3y \quad \text{con} \quad y(0) = 4$$

la soluzione è $y(x) = 4e^{-3x}$. La verifica consiste nel sostituire $y = 4e^{-3x}$ (da cui $y' = -12e^{-3x}$) nella equazione ricavando

$$-12e^{-3x} + 3(4e^{-3x}) = 0$$

e nel sostituire $y = 4e^{-3x} + 2$ nella condizione iniziale ricavando

$$y(0) = 4 \cdot 1 = 4.$$

- H0 $y' = 2xy^2$ con $y(0) = -1$
- H1 $y' = 3x^2y^2$ con $y(1) = -1$
- H2 $y' = x(1 + y^2)$ con $y(\sqrt{\pi}) = 0$
- H3 $y' = x^3(1 + y^2)$ con $y(0) = 0$
- H4 $y' = x\cos^2y$ con $y(0) = 0$
- H5 $y' = e^x \cos^2y$ con $y(0) = 5\pi/4$
- H6 $y' = xy \lg y$ con $y(0) = e$
- H7 $y' = \frac{y \lg y}{x}$ con $y(1/2) = e$
- H8 $y' = x\sqrt{1 - y^2}$ con $y(0) = 1$
- H9 $y' = \frac{1}{x}\sqrt{1 - y^2}$ con $y(1) = 0$

SOLUZIONI (sperando che siano tutte giuste)

Equazioni che sono lineari in y

- E0 $y = C e^{-x^2/2}$
- E1 $y = C e^{x^2/2}$
- E2 $y = C x$
- E3 $y = \frac{C}{x}$
- E4 $y = C e^{1/x}$

Equazioni a variabili separabili autonome

La y andrà esplicitata in seguito, quando possibile

- F0 $\frac{-1}{y} = x + C$
- F1 $\arctan(y) = x + C$
- F2 $\tan(y) = x + C$
- F3 $\ln |\ln(y)| = x + C$
- F4 $\arcsin(y) = x + C$

Equazioni a variabili separabili generali

La y andrà esplicitata in seguito, quando possibile

- G0 $\frac{-1}{y} = x^2 + C$
- G1 $\frac{-1}{y} = x^3 + C$
- G2 $\arctan(y) = (x^2)/2 + C$
- G3 $\arctan(y) = (x^4)/4 + C$
- G4 $\tan(y) = (x^2)/2 + C$
- G5 $\tan(y) = e^x + C$
- G6 $\ln |\ln |y|| = (x^2)/2 + C$
- G7 $\ln |\ln |y|| = \ln |x| + C$
- G8 $\arcsin(y) = (x^2)/2 + C$
- G9 $\arcsin(y) = \ln |x| + C$

Problemi ai valori iniziali

- H0 $y = \frac{-1}{1+x^2}$
- H1 $y = \frac{-1}{x^3}$
- H2 $y = \tan((x^2)/2 + \pi/2)$
- H3 $y = \tan((x^4)/4)$
- H4 $y = \arctan(x^2)/2$
- H5 $y = \arctan(e^x) + \pi$
- H6 $y = e^{e^{x^2/2}}$
- H7 $y = e^{2x}$
- H8 $y = \sin((x^2)/2 + \pi/2)$
- H9 $y = \sin(\ln(x))$