Alcuni esercizi sugli integrali

N.B. I risultati NON sono necessariamente INTERI

Integrali immediati

Questi integrali si possono calcolare in uno dei due modi seguenti: il primo modo consiste nel trovare una primitiva P della funzione integranda f (guardando nelle tavole delle primitive fondamentali) e poi applicando il teorema fondamentale del calcolo:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = P(b) - P(a).$$

Il secondo modo (quando è applicabile) consiste nello scoprire che ci viene richiesto di integrare una funzione dispari (cioè tale che $f(x) = -f(-x)$ per tutti gli x) su un intervallo pari (cioè del tipo $(-a, a)$). In questo caso l'integrale fa zero.

- $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-1}^{1} e^{x}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-1}^{1} \mathrm{sh}\,(x)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-1}^{1} \mathrm{ch}\,(x)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-1}^{1} 3x^2\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-1}^{1} 4x^3\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-1/2}^{1/2} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \dfrac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{arctg}\,(x)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-1}^{1} \mathrm{arctg}^3\,(x)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{1}^{2} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{1}^{2} \dfrac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{1}^{2} \dfrac{-2}{x^3}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x =$

Integrali quasi immediati

Questi integrali si ricavano dalle tavole delle derivate fondamentali applicando la regola diderivazione della funzione di funzione: $D(f(g(x))) = f'(g(x))\, g'(x)$. Ad esempio, sapendo che $D\sin(x^2) = 2x\cos(x^2)$ si ricava che una primitiva di $2x\cos(x^2)$ è data da $\sin(x^2)$.

- $\int_0^1 (-2)e^{-2x}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 3\, e^{3x}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 5\, \mathrm{sh}\,(5x)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 (-3)\mathrm{ch}\,(-3x)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 \dfrac{2}{1+4\,x^2}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^{1/4} \dfrac{2}{\sqrt{1-4\,x^2}}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^{\pi/8} \dfrac{2}{\cos^2(2x)}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_1^2 \dfrac{3}{1+3\,x}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^{\pi} 5\, \sin(5x)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^{\pi/6} 3\, \cos(3x)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 (-2x)e^{-x^2}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 (3x^2)\, e^{x^3}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 (5x^4)\, \mathrm{sh}\,(x^5)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 (-3x^2)\, \mathrm{ch}\,(-x^3)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 \dfrac{2x}{1+x^4}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^{1/4} \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \dfrac{2x}{\cos^2(x^2)}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_1^2 \dfrac{3x^2}{1+x^3}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^{\pi} 5x^4\, \sin(x^5)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^{\pi/6} 3x^2\, \cos(x^3)\, \mathrm{d}x =$

Integrali molto facili

Gli integrali seguenti si riconducono a quelli precedenti *aggiustando la costante moltiplicativa.* Ad esempio, sapendo che $D\sin(x^2) = 2x\cos(x^2)$ si ricava che una primitiva di $4x\cos(x^2)$ è data da $2\sin(x^2)$.

- $\int_0^1 x\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 x^2\, e^{x^3}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 x^4\,\mathrm{sh}\,(x^5)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 x^3\,\mathrm{ch}\,(x^4)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^{1/4} \dfrac{1}{\sqrt{1-4\,x^2}}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^{\pi/8} \dfrac{1}{\cos^2(2x)}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_1^2 \dfrac{1}{1+3\,x}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_1^2 \dfrac{x}{1+3\,x^2}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^\pi x\,\sin(x^2)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^\pi x\,\sin(5x^2)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^\pi x^2\,\sin(x^3)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^{\pi/6} x\,\cos(x^2)\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^{\pi/6} x^3\,\cos(3x^4)\,\mathrm{d}x =$

Integrali ottenibili per addizione e sottrazione o per decomposizione

Per i seguenti integrali viene suggerita una strategia di soluzione

- $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 \dfrac{x}{2-x}\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_0^1 \frac{-2+x}{2-x} + \frac{2}{2-x}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 \dfrac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$
- $\int_0^{1/2} \dfrac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}\,\mathrm{d}x =$

Integrali per parti

- $\int_0^1 x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 x\, e^{2x}\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 x\, \mathrm{sh}\,(x)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 \ln(x)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^1 \mathrm{arctg}\,(x)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^\pi x\, \sin(x)\, \mathrm{d}x =$
- $\int_0^\pi (-2x)\, \cos(3x)\, \mathrm{d}x =$

Verificare (e imparare a memoria) i seguenti
integrali notevoli

- $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\, \mathrm{d}x = \pi/4$
- $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, \mathrm{d}x = \pi/4$
- $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2(x)\, \mathrm{d}x = \pi/4$
- $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2(x)\, \mathrm{d}x = \pi/4$
- $\int_{\pi}^{3\pi/2} \sin^2(x)\, \mathrm{d}x = \pi/4$
- $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^2(x)\, \mathrm{d}x = \pi/4$
- $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin^2(x)\, \mathrm{d}x = \pi/4$
- $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos^2(x)\, \mathrm{d}x = \pi/4$
- $\int_0^1 x^k\, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{k+1}$ per $k > -1$
- $\int_0^{+\infty} x^0\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \equiv \int_0^{+\infty} e^{-x}\, \mathrm{d}x = 1$
- $\int_0^{+\infty} x^1\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \equiv \int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 1$
- $\int_0^{+\infty} x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2$
- $\int_0^{+\infty} x^3\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2 \cdot 3$
- $\int_0^{+\infty} x^4\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2 \cdot 3 \cdot 4$
- $\int_0^{+\infty} x^n\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = n!$ per n intero ≥ 0

Integrali di funzioni definite a pezzi

- Disegnare la funzione f data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \leq 0 \\ e^x & \text{per } 0 < x \leq \ln 2 \\ 2 & \text{per } \ln 2 < x \end{cases}$$

Posto $F(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \ \forall x$, calcolare $F(-1) + F(3)$.

- Disegnare la funzione f data da

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{per } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \ 1 & \text{per } \pi/2 < x \leq 4 \\ x - 3 & \text{per } 4 < x \end{cases}$$

Posto $F(x) := \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \ \forall x \geq 0$, calcolare $F(0) + F(2) + F(5)$.

- Disegnare la funzione f data da

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ x - 1 & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{per } 1 < x \end{cases}$$

Posto $F(x) := \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \ \forall x \geq -1$, calcolare $F(-1) + F(0) + F(3)$.

- Disegnare la funzione f data da

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{per } 1 < x < 2 \\ x - 2 & \text{per } 2 \leq x \end{cases}$$

Posto $F(x) := \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \ \forall x \geq -1$, calcolare $F(-1) + F(0) + F(2) + F(3)$.

- Disegnare la funzione f data da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x \leq -\pi \\ \sin(x^3) & \text{per } -\pi < x \leq \pi \\ 1 & \text{per } \pi < x < 4 \\ 2 & \text{per } 4 \leq x \end{cases}$$

Posto $F(x) := \int_\pi^x f(t)\,\mathrm{d}t \ \forall x \geq -\pi$, calcolare $F(-4) + F(-\pi) + F(2\pi)$.