Enunciato Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora f è integrabile su $[a,b]$.

Dimostrazione Per dimostrarlo, facciamo vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare una partizione

$$a \equiv x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} \equiv b \tag{1}$$

tale che, definendo le due funzioni a scala ℓ e u come

$$\ell(x) = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \quad \text{e} \quad u(x) = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \qquad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\tag{2}$$

si ottenga

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \ell(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Le mucche si chiedono cosa c'entri questo con l'integrabilità. Vengono cortesemente invitate a riguardarsi la definizione di funzione integrabile.

Ricordiamo che per il teorema di Heine la funzione f sarà uniformemente continua in $[a,b]$, che vuol dire

$$\forall \eta > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad \forall x', x'' \in [a,b] \qquad \{|x' - x''| \leq \delta\} \Rightarrow \{|f(x') - f(x'')| \leq \eta\} \tag{4}$$

Dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $\eta := \varepsilon/(b-a)$ e usiamolo in (4). Ottenuto il corrispondente δ dalla (4) prendiamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > (b-a)/\delta$. Poi suddividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n subintervalli di uguale lunghezza.

Osserviamo che la lunghezza di ogni subintervallo risulta essere $(b-a)/n < \delta$. Osserviamo inoltre che, essendo la f continua, per il teorema dei massimi e minimi l'inf e il sup che compaiono nella (2) sono in realtà dei minimi e dei massimi (rispettivamente), nel senso che in ogni subintervallo $[x_k, x_{k+1}]$ ci saranno un x_m^k e un x_M^k tali che

$$f(x_m^k) \leq f(x) \leq f(x_M^k) \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}]. \tag{5}$$

Conseguentemente avremo anche, in ogni subintervallo $]x_k, x_{k+1}[$,

$$\ell(x) = f(x_m^k) \quad \text{e} \quad u(x) = f(x_M^k) \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[. \tag{6}$$

. Dato che x_m^k e x_M^k, essendo nello stesso subintervallo, distano tra loro per meno di δ, la (4) ci dice che $f(x_M^k) - f(x_m^k) < \eta$. Dato che la stessa cosa avviene in ogni subintervallo, avremo

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \ell(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b \eta \mathrm{d}x = (b-a)\eta = \varepsilon, \tag{7}$$

che conclude la dimostrazione (muggiti perplessi).