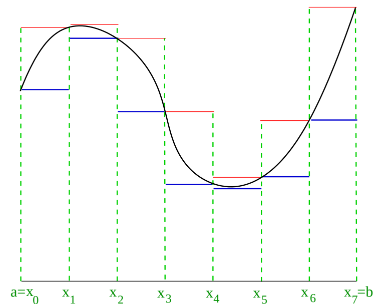

Definizione di integrale per funzioni continue

Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, e sia $f \in C^0([a,b])$.
Per ogni intero positivo n costruiamo:

- I punti $x_0, .., x_n$ che suddividono $[a,b]$ in n parti uguali:
$$x_k := a + k\,\frac{b-a}{n}, \qquad k = 0, 1, .., n.$$
Notiamo esplicitamente che $x_0 = a$, che $x_n = b$, e che $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$ per ogni $k = 0, .., n-1$.
- I valori massimi $M_1, .., M_n$ che la f assume in ciascuno degli n subintervalli ottenuti al punto precedente.
- I valori minimi $m_1, .., m_n$ che la f assume in ciascuno degli n subintervalli ottenuti al primo punto.
- Le somme
$$S(n) := \sum_{r=1}^{n} M_r\,(x_r - x_{r-1}) \quad \text{e} \quad s(n) := \sum_{r=1}^{n} m_r\,(x_r - x_{r-1}).$$

Abbiamo ottenuto due applicazioni $n \to S(n)$ e $n \to s(n)$. Un teorema importante (la cui dimostrazione non è richiesta per l'orale di livello medio) garantisce che se $f \in C^0([a,b])$ allora le due successioni S e s **hanno lo stesso limite**:
$$\lim_{n\to+\infty} S(n) = \lim_{n\to+\infty} s(n).$$
Tale limite viene detto **integrale di f su** $[a,b]$ e viene indicato con
$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
In conclusione quindi, ripetendomi un po' (tanto per essere noioso come tutti si apettano che sia un matematico decente), abbiamo:
$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to+\infty} S(n) \equiv \lim_{n\to+\infty} s(n).$$