Definizione di integrale per funzioni limitate

Le funzioni a scala ed il loro integrale

Definizione di funzione a scala. Siano a e b due numeri reali, con $a < b$. Sia $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita in $[a, b]$. Diciamo che s **è una funzione a scala su** (a, b) se esiste una partizione P di $[a, b]$

$$a \equiv \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n \equiv b$$

tale che s risulti costante in ogni subintervallo *aperto* $]\xi_{r-1}, \xi_r[$ della partizione. (N.B. La lettera ξ si pronuncia "csi". Grazie.)

Definizione di partizione adattata. Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, sia $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione a scala su (a, b), e sia Q una partizione di $[a, b]$:

$$a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b.$$

Diciamo che **la partizione** Q **è adattata alla funzione** s se s risulta costante in ogni subintervallo $]x_{r-1}, x_r[$ della partizione.

Raffinamenti di partizioni adattate. Si noti che, se Q è una partizione adattata a s, allora ogni nuova partizione ottenuta dalla Q aggiungendo un punto di suddivisione (cioè ogni *raffinamento della partizione* Q) risulta anch'essa adattata a s.

Definizione di integrale di una funzione a scala. Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, sia $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione a scala su (a, b), sia Q una partizione di $[a, b]$

$$a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b$$

adattata a s e siano infine $c_1, c_2, \dots, c_n$ i valori costanti che la s assume in ognuno dei subintervalli $]x_{r-1}, x_r[$ $(r = 1, 2, \dots, n)$ della partizione Q. Definiamo **integrale di** s **su** (a, b) il numero

$$\int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{r=1}^{n} c_r\,(x_r - x_{r-1}).$$

Indipendenza dalla partizione. Si noti che, a questo punto, bisognerebbe *dimostrare* che la definizione data **non dipende dalla scelta di** Q (tra tutte le infinite partizioni di $[a, b]$ che sono adattate a s). Mi aspetto che il candidato abbia almeno una idea intuitiva del *perché* questo sia vero (e abbia capito *perché* bisognerebbe dimostrarlo).

L'integrale di una funzione limitata

Definizione degli insiemi (di funzioni) $\mathcal{U}_f$ e $\mathcal{L}_f$. Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata su (a, b).

Associamo ad f i due **insiemi di funzioni** seguenti:

$$\mathcal{U}_f := \{u| \quad u \text{ è a scala su}(a, b) \text{ e } f(x) \leq u(x)\ \forall x \in (a, b)\}$$

$$\mathcal{L}_f := \{\ell| \quad \ell \text{ è a scala su}(a, b) \text{ e } f(x) \geq \ell(x)\ \forall x \in (a, b)\}.$$

In altre parole (meno precise): $\mathcal{U}_f$ è l'insieme di tutte le funzioni a scala che stanno *sopra* f, mentre $\mathcal{L}_f$ è l'insieme di tutte le funzioni ascala che stanno *sotto* f.
N.B. Le lettere u e ℓ sono le iniziali delle parole inglesi *upper* e *lower*. Non si tratta di esterofilia: purtroppo le parole italiane *sopra* e *sotto* cominciano entrambe per s, come del resto anche la parola *scala*. :-(

Gli insiemi $\mathcal{U}_f$ e $\mathcal{L}_f$ sono non vuoti. È importante notare che: il fatto che f sia limitata superiormente implica che $\mathcal{U}_f$ sia *non vuoto*; analogamente il fatto che f sia limitata inferiormente implica che $\mathcal{L}_f$ sia *non vuoto*. Avendo noi supposto che la f fosse limitata (quindi contemporaneamente limitata superiormente e limitata inferiormente), otteniamo che *entrambi* $\mathcal{U}_f$ e cL_f sono non vuoti.

Definizione degli insiemi (di numeri reali) U_f e L_f. Ora costruiamo due **insiemi di numeri reali** (sempre dipendenti da f):

$$U_f := \{I_u \in \mathbb{R} \text{ tali che } \exists u \in \mathcal{U}_f \text{ con } I_u = \int_{[a,b]} u(x)\, \mathrm{d}x\}$$

e

$$L_f := \{I_\ell \in \mathbb{R} \text{ tali che } \exists \ell \in \mathcal{L}_f \text{ con } I_\ell = \int_{[a,b]} \ell(x)\, \mathrm{d}x\}.$$

In altre parole, U_f è costituito dagli **integrali** delle funzioni a scala che stanno *sopra* f mentre L_f è costituito dagli *integrali* delle funzioni a scala che stanno *sotto* f.

Ordinamento tra gli insiemi U_f e L_f. Ora bisogna osservare che ogni elemento di L_f è sempre minore o uguale ad ogni elemento di U_f. Infatti se I_ℓ sta in L_f vuol dire che esiste una funzione a scala $\ell \leq f$, tale che

$$I_\ell = \int_{[a,b]} \ell(x)\, \mathrm{d}x.$$

Analogamente, se I_u sta in U_f vuol dire che esiste una funzione a scala $u \geq f$, tale che

$$I_u = \int_{[a,b]} u(x)\, \mathrm{d}x.$$

Presa allora una partizione Q che sia adattata a entrambe le funzioni a scala ℓ e u (*Domanda: perché siamo sicuri di poterne trovare una?*), avremo (visto che $\ell \leq f \leq u$ in tutto (a,b)) che i valori (costanti) di ℓ su ogni subintervallo della partizione (chiamiamoli c_r^ℓ) saranno sempre minori o uguali dei corrispettivi valori (anch'essi costanti) di u (che chiamiamo c_r^u). Conseguentemente

$$(1)\quad I_\ell = \int_{[a,b]} \ell(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{r=1}^{n} c_r^\ell\, (x_r - x_{r-1}) \leq \sum_{r=1}^{n} c_r^u\, (x_r - x_{r-1}) = \int_{[a,b]} u(x)\, \mathrm{d}x = I_u.$$

Gli insiemi U_f e L_f sono non vuoti. Abbiamo visto che gli insiemi $\mathcal{L}_f$ e $\mathcal{U}_f$ sono entrambi non vuoti (grazie alla limitatezza di f). Conseguentemente, avremo che gli insiemi L_f e U_f (costituiti dagli integrali delle funzioni che stanno in $\mathcal{L}_f$ e $\mathcal{U}_f$, rispettivamente, sono anch'essi non vuoti.

L'insieme U_f è limitato inferiormente e l'insieme L_f è limitato superiormente. In conseguenza della (1), che vale per ogni $I_u \in U_f$ e per ogni $I_\ell \in L_f$, avremo che ogni elemento $I_u \in U_f$ risulterà essere *un maggiorante dell'insieme* L_f. Di conseguenza l'insieme L_f (che ha almeno un maggiorante, visto che U_f è non vuoto) risulterà essere *limitato superiormente*. In maniera analoga, ogni elemento $I_\ell \in L_f$ risulterà essere *un minorante dell'insieme* U_f. Di conseguenza l'insieme U_f (che ha almeno un minorante, visto che L_f è non vuoto) risulterà essere *limitato inferiormente*

Questa è stata la prima *veronica mentale* da imparare. Rivediamola sinteticamente: abbiamo prima osservato che entrambi sono non vuoti, poi abbiamo osservato che il fatto che ognuno dei due sia non vuoto implica la limitatezza (da sopra o da sotto, a seconda dei casi) *dell'altro*. Ricordatevi che tutto questo accade poiché abbiamo supposto la f **limitata**: quindi $\mathcal{U}_f$ e $\mathcal{L}_f$ sono non vuoti, quindi anche U_f e L_f sono non vuoti, etc. Senza la limitatezza di f, nulla di tutto questo potrebbe essere fatto!

Definizione dei due numeri $I^*(f)$ e $I_*(f)$. Grazie alle proprietà dell'*estremo superiore* e dell'*estremo inferiore*, avremo quindi che esistono, finiti entrambi

$$I^*(f) := \inf U_f \quad \text{ e } I_*(f) := \sup L_f.$$

Ovviamente, i due numeri $I^*(f)$ e $I_*(f)$ (che esistono *sempre*, entrambi, purché la f sia limitata), dipendono dalla scelta di f. Al variare di f tra tutte le possibili funzioni limitate, varieranno i corrispondenti numeri $I^*(f)$ e $I_*(f)$.

Il numero $I_*(f)$ è sempre minore o uguale del numero $I^*(f)$. Osserviamo che si avrà *sempre*

$$I_*(f) \leq I^*(f).$$

Infatti, ad esempio, $I^*(f) = \inf U_f$ è il più grande dei minoranti di U_f. Visto che (dalla (1)), ogni elemento di L_f è un minorante di U_f, ne deduciamo che $I^*(f)$ risulta maggiore o uguale di ogni elemento di L_f. In altre parole, abbiamo ottenuto che $I^*(f)$ è un maggiorante di L_f. Quindi deve essere maggiore anche di $I_*(f)(= \sup L_f)$ che, appunto, è il più piccolo dei maggioranti. Un bravo candidato deve saper eseguire questa seconda *veronica mentale* anche al contrario: partendo dal fatto che $I_*(f)(= \sup L_f)$ è il più piccolo dei maggioranti di L_f, e che tutti gli elementi di U_f sono maggioranti di L_f, deduciamo che $I_*(f)$ è minore o uguale di ogni elemento di $U(f)$, eccetera.

La distinzione tra funzioni integrabili e non integrabili, e la definizione di integrale. Abbiamo visto che ad ogni f limitata possiamo, con un po' di lavoro, associare *due numeri* $I^*(f)$ e $I_*(f)$, nel modo sopra descritto. Per tali due numeri avremo sempre $I_*(f) \leq I^*(f)$, ma *non sappiamo* (senza saperne di più su f) se avremo $I^*(f) < I_*(f)$ oppure $I^*(f) = I_*(f)$.
Colloquialmente: se la f è una funzione *umaaana* (da pronunciare alla Fantozzi), cioè se NON è una delle famose *schifezze* che i matematici sono così bravi ad inventarsi, avremo $I^*(f) = I_*(f)$. Ma i matematici, con la loro immaginazione tipicamente *volta al male*, sanno trovare anche delle f per cui risulta $I_*(f) < I^*(f)$. Ad esempo per la funzione *di Dirichlet* $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{per } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{2}$$

(dove $\mathbb{Q}$ rappresenta l'insieme delle frazioni) risulta $I^*(f) = 1$ e $I_*(f) = 0$ (*Domanda: perché?*).

Matematicamente parlando: **se f è tale che si abbia $I^*(f) = I_*(f)$ allora diciamo che f è integrabile su $[a,b]$, e che il suo integrale è dato dal valore comune di $I^*(f)$ e $I_*(f)$. In caso contrario (cioè se risulta $I_*(f) < I^*(f)$) allora diremo che f non è integrabile su $[a,b]$.**

Ouf!