

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Enunciato Sia $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di numeri reali **limitata**. Allora x ha una sottosuccessione convergente.

Preliminari

Dire che la successione $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata equivale a dire che esistono a e b in \mathbb{R} tali che

$$a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Dire che la successione $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente equivale a dire che esistono: una applicazione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ **strettamente crescente** (detta "funzione di scelta") e un numero reale ℓ tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{s(k)} = \ell. \quad (2)$$

Osserviamo anche, prima di cominciare la dimostrazione, che (quasi) tutto il gioco andrà fatto **sugli indici n** e non sulle loro immagini x_n . Infatti gli indici sono in numero infinito, e tutti diversi tra loro (0, 1, 2, 3...) mentre le loro immagini potrebbero coincidere tutte in un solo punto (se la x fosse una successione costante, anche se in questo caso la tesi sarebbe ovvia prendendo come s l'identità) oppure raggrupparsi in un numero finito di punti, se ad esempio la successione x fosse data da $x_n := (-1)^n$: in questo caso l'immagine della successione x sarebbe fatta dai due punti 1 e -1. La tesi sarebbe comunque vera, ad esempio prendendo $s(k) := 2k$ (e $\ell = 1$) oppure $s(k) := 2k + 1$ (e $\ell = -1$). Controllate che sia vero...

Dimostrazione Per fare la dimostrazione dovremo costruire *tre successioni*: una successione di **sotto-intervalli** $[a_k, b_k]$ di $[a, b]$, una successione di **insiemi di indici** $I_k \subset \mathbb{N}$ e infine la successione di **indici** $s(k)$.

Cominciamo col caso $k = 0$ e poniamo

$$I_0 := \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$a_0 := a \quad b_0 := b, \quad (4)$$

$$s(0) := 0 (= \text{minimo indice contenuto in } I_0). \quad (5)$$

A questo punto dobbiamo costruire l'intervallo $[a_1, b_1]$, l'insieme di indici I_1 e l'indice $s(1)$. Cominciamo da $[a_1, b_1]$: prendiamo il punto medio $m_0 = (a_0 + b_0)/2$ e suddividiamo $[a_0, b_0]$ in due sottointervalli di uguale lunghezza $[a_0, m_0]$ e $[m_0, b_0]$. Osserviamo che I_0 *contiene infiniti indici diversi*, e le corrispondenti immagini sono tutte in $[a_0, b_0]$. Quindi **almeno uno** dei due sottointervalli $[a_0, m_0]$ e $[m_0, b_0]$ conterrà **le immagini di infiniti indici diversi**. Quindi
- se $[a_0, m_0]$ *contiene le immagini di infiniti indici diversi allora poniamo*

$$[a_1, b_1] := [a_0, m_0]; \quad (6)$$

- altrimenti poniamo

$$[a_1, b_1] := [m_0, b_0]. \quad (7)$$

Osserviamo che, per come abbiamo fatto la costruzione, valgono le seguenti tre proprietà

$$[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0] \text{ e quindi } a_1 \geq a_0 \text{ e } b_1 \leq b_0 \quad (8)$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{b - a}{2^1} \quad (9)$$

$$[a_1, b_1] \text{ contiene le immagini di infiniti indici.} \quad (10)$$

Avendo scelto $[a_1, b_1]$ procediamo alla scelta di I_1 e di $s(1)$. Poniamo:

$$I_1 := \{n > s(0) \mid x_n \in [a_1, b_1]\} \quad (11)$$

$$s(1) := \text{minimo indice contenuto in } I_1. \quad (12)$$

Osserviamo che valgono le proprietà:

$$\forall n \in I_1 \quad x_n \in [a_1, b_1] \quad (13)$$

$$I_1 \text{ contiene infiniti indici} \quad (14)$$

$$s(1) \in I_1 \quad (15)$$

$$s(1) > s(0). \quad (16)$$

Con la stessa strategia, partendo da $[a_k, b_k]$, I_k , $s(k)$ ($k \geq 1$) costruiamo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, I_{k+1} , $s(k+1)$. Sollecitato da *Soccorso Bovino* riporto i passaggi essenziali.

Prendiamo il punto medio $m_k = (a_k + b_k)/2$ e suddividiamo $[a_k, b_k]$ in due sottointervalli di uguale lunghezza $[a_k, m_k]$ e $[m_k, b_k]$. Osserviamo che **almeno uno** dei due sottointervalli $[a_k, m_k]$ e $[m_k, b_k]$ conterrà **le immagini di infiniti indici diversi**. Quindi
- se $[a_k, m_k]$ contiene **le immagini di infiniti indici diversi** allora poniamo

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := [a_k, m_k]; \quad (17)$$

- altrimenti poniamo

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := [m_k, b_k]. \quad (18)$$

Avendo scelto $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ scegliamo ora I_{k+1} e $s(k+1)$.

$$I_{k+1} := \{n > s(k) \mid x_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}]\} \quad (19)$$

$$s(k+1) := \text{minimo indice contenuto in } I_{k+1}. \quad (20)$$

Osserviamo che, per come abbiamo fatto la costruzione, valgono le seguenti proprietà

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \text{ e quindi } a_{k+1} \geq a_k \text{ e } b_{k+1} \leq b_k \quad (21)$$

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \dots = \frac{b - a}{2^{k+1}} \quad (22)$$

$$\forall n \in I_{k+1} \quad x_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}] \quad (23)$$

$$I_{k+1} \text{ contiene infiniti indici} \quad (24)$$

$$s(k+1) \in I_{k+1} \quad (25)$$

$$s(k+1) > s(k). \quad (26)$$

Anche se non si vede ancora, siamo a pochi passi dalla meta. Finora non abbiamo utilizzato nessuno dei teoremi di analisi dimostrati in precedenza. Adesso usiamo un teorema semplice ma potente: il teorema della convergenza delle successioni monotone e limitate. Dalla (21) abbiamo che la successione a_k è non decrescente. Inoltre essa è limitata, poiché tutti i suoi elementi stanno in $[a, b]$. Analogamente la successione b_k è non crescente e limitata. Quindi convergono entrambe. Poniamo

$$\alpha := \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k \quad \beta := \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k. \quad (27)$$

Ma passando al limite nella (22) abbiamo

$$\alpha - \beta = \lim_{k \rightarrow +\infty} (b_k - a_k) = 0 \quad (28)$$

da cui $\alpha = \beta$. Poniamo quindi

$$\ell := \alpha \equiv \beta. \quad (29)$$

Ora osserviamo che, per ogni k , abbiamo dalla (23) e dalla (25)

$$a_k \leq x_{s(k)} \leq b_k. \quad (30)$$

Grazie alle (27)-(30) possiamo applicare il teorema dei carabinieri, ottenendo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{s(k)} = \ell \quad (31)$$

che termina la dimostrazione.

Domanda: perché ho riportato esplicitamente la proprietà (24), che non ho minimamente usato nella dimostrazione della (31)? C'è forse un punto che avrei dovuto precisare meglio, nel passaggio dal "caso k " al "caso $k + 1$ "? Le mucche impallidiscono. Echeggiano muggiti si sconforto.