Teorema dell'esistenza dei massimi e dei minimi)

**Enunciato** Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora esistono $x_m$ e $x_M$ in $[a,b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{1}$$

**Dimostrazione**

Dimostreremo l'esistenza di $x_M$. Con un ragionamento analogo si può dimostrare l'esistenza di $x_m$. Supponiamo anche di avere già dimostrato il teorema di Weirestrass (per una dimostrazione che non usa il teorema di Weierstrass, ma anzi lo include, si veda Weierstrass (con max e min)). Quindi "sappiamo già" che una funzione continua su un intervallo chiuso è limitata.

Sia $y^*$ l'estremo superiore della immagine di $f$. Dobbiamo dimostrare che esiste un $x_M$ tale che $f(x_M) = y^*$. Tanto per cominciare, abbiamo ovviamente $f(x) \leq y^*$ per ogni $x \in [a,b]$. Dobbiamo escludere che sia

$$f(x) < y^* \qquad \forall\, x \in [a,b]. \tag{2}$$

Se la (2) fosse vera, potremmo, per ogni $x \in [a,b]$, definire la funzione ausiliaria

$$g(x) := \frac{1}{y^* - f(x)} \tag{3}$$

che risulterebbe essere una funzione continua su tutto $[a,b]$. In quanto tale la $g$ sarebbe superiormente limitata, cioè esisterebbe un $M$ tale che

$$M \geq g(x) \equiv \frac{1}{y^* - f(x)} \qquad \forall\, x \in [a,b]. \tag{4}$$

Ma allora si avrebbe, dalla (4)

$$f(x) \leq y^* - \frac{1}{M}, \tag{5}$$

e quindi $y^* - 1/M$ sarebbe un maggiorante della immagine di $f$ più piccolo di $y^*$. Il che è impossibile, perché $y^*$ (essendo l'estremo superiore) è *il più piccolo dei maggioranti*. Ne concludiamo che la (2) nonè vera, e quindi esiste un $x_M$ tale che $f(x_M) = y^*$.