Enunciato Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora f è uniformemente continua in $[a,b]$.

Dimostrazione Ricordiamo la definizione di funzione uniformemente continua in $[a,b]$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad \forall x', x'' \in [a,b] \qquad \{|x' - x''| \leq \delta\} \Rightarrow \{|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon\} \tag{1}$$

Supponiamo ora che la tesi non sia vera e vediamo che questo ci mette in contradizione con l'ipotesi (cioè $f \in C^0([a,b])$).

Un punto delicato è proprio scrivere correttamente (con i dovuti quantificatori) che la (1) è falsa. Ragionandoci sopra, troviamo che la falsità di (1) equivale a

$$\exists \varepsilon^* > 0 : \Big\{ \forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' \in [a,b] : \{|x' - x''| \leq \delta\} \textbf{ e } \{|f(x') - f(x'')| > \varepsilon^*\} \Big\}. \tag{2}$$

(muggiti di sconcerto)
Adesso teniamo ovviamente ε^* fermo (gli abbiamo anche dato un nome appropriato per questo) e usiamo il pezzo

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' \in [a,b] : \{|x' - x''| \leq \delta\} \textbf{ e } \{|f(x') - f(x'')| > \varepsilon^*\}. \tag{3}$$

Nella (3) il valore di δ è a nostra scelta. Usiamola infinite volte, dando a δ successivamente i valori $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots . \frac{1}{n}, \ldots$ Otterremo due successioni x'_n e x''_n, entrambe contenute in $[a,b]$ e con le proprietà:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \{|x'_n - x''_n| \leq \frac{1}{n}\} \textbf{ e } \{|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon^*\}. \tag{4}$$

Sfoderiamo ora il potentissimo teorema di Bolzano-Weierstrass, e applichiamolo alla successione degli x'_n. Otterremo una funzione di scelta $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e un numero $x^* \in [a,b]$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} x'_{s(k)} = x^*. \tag{5}$$

A questo punto osserviamo che dalle (4) e (5) si ottiene facilmente che vale anche

$$\lim_{k \to +\infty} x''_{s(k)} = x^*. \tag{6}$$

(mucche: $|x''_{s(k)} - x^*| \leq |x''_{s(k)} - x'_{s(k)}| + |x'_{s(k)} - x^*| \leq \frac{1}{s(k)} + |x'_{s(k)} - x^*| \to 0$). Consideriamo ora la seconda delle (4) solo per gli indici $n = s(k)$ abbiamo

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad |f(x'_{s(k)}) - f(x''_{s(k)})| > \varepsilon^* > 0. \tag{7}$$

La f, per ipotesi, dovrebbe essere continua in tutto $[a,b]$, e quindi anche in x^*. Ma se f è continua in x^* possiamo passare al limite per $k \to +\infty$ nella (7), applicare il lemma di commutazione (usando la (5) e la (6)) e la permanenza del segno, e ottenere

$$|f(x^*) - f(x^*)| \geq \varepsilon^* > 0,$$

palesemente impossibile.