Enunciato Sia $f \in C^0([a,b])$ e sia y_0 un numero reale. Costruiamo l'insieme

$$\mathcal{M} = \{x \in [a,b] \text{ tali che } f(x) \geq y_0\}. \tag{1}$$

Supponiamo che l'insieme $\mathcal{M}$ sia **non vuoto** e poniamo

$$\alpha := \inf \mathcal{M} \qquad \beta := \sup \mathcal{M}. \tag{2}$$

Allora abbiamo (tesi)

$$\text{se } f(a) < y_0 \text{ allora } f(\alpha) = y_0 \tag{3}$$

$$\text{se } f(b) < y_0 \text{ allora } f(\beta) = y_0 \tag{4}$$

Dimostrazione

Dimostriamo la (4). La dimostrazione della (3) è praticamente identica. Cominciamo a osservare che, dalla (2) e dalle proprietà dell'estremo superiore si ha

$$\beta \geq x \qquad \forall x \in \mathcal{M} \tag{5}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in \mathcal{M} : \quad x_\varepsilon > \beta - \varepsilon \tag{6}$$

Per cominciare, facciamo vedere che $f(\beta)$ non può essere strettamente minore di y_0, facendo vedere che supponendo $f(\beta) < y_0$ cadiamo in una contradizione. Infatti, per il teorema della permanenza del segno, se fosse $f(\beta) < y_0$ allora $f(x)$ sarebbe minore di y_0 in tutto un intorno sinistro di β. In altre parole esisterebbe un $\delta > 0$ tale che $f(x) < y_0$ per tutti gli x con $\beta - \delta \leq x \leq \beta$. Quindi tra $\beta - \delta$ e β non ci sarebbero elementi dell'insieme $\mathcal{M}$. Ma prendendo $\varepsilon := \delta$ nella (6) avremmo una contradizione: infatti dalla (6) dovremmo avere un $x_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tra $\beta - \delta$ e β mentre sappiamo che in tale intervallo non ci sono elementi di $\mathcal{M}$. Quindi siamo sicuri che $f(\beta) \geq y_0$.

Ora osserviamo che se facciamo l'ipotesi aggiuntiva che $f(b) < y_0$, avendo già scoperto che $f(\beta) \geq y_0$, non si potrà mai avere $\beta = b$. Quindi, colloquialmente parlando, *a destra di β c'è spazio*. Matematicamente, l'intervallo $]\beta, b[$ non è vuoto. E ricordando che β è l'estremo superiore di $\mathcal{M}$, e guardando la (5), ci convinciamo che in tale intervallo non ci possono essere punti di $\mathcal{M}$ (cenni di assenso dalle mucche). Facciamo allora vedere che in tal caso $f(\beta)$ non può essere strettamente maggiore di y_0, facendo vedere che supponendo $f(\beta) > y_0$ cadiamo in una contradizione. Immaginiamo infatti che sia $f(\beta) > y_0$. Per il teorema della permanenza del segno, si avrebbe tutto un intorno di β in cui f è ancora maggiore di y_0. E visto che $\beta < b$ (cioè *a destra di β c'è spazio*), questo avviene sia a sinistra di β sia a destra di β. Ma abbiamo visto che a destra di β non ci possono essere elementi di $\mathcal{M}$ e quindi l'assunzione $f(\beta) > y_0$ ci ha portato ad una contradizione.

In conclusione: *i*) non si può avere mai $f(\beta) < y_0$, e *ii*) se $f(b) < y_0$ non si può avere neppure $f(\beta) > y_0$. Concludiamo che se $f(b) < y_0$ allora si deve avere $f(\beta) = y_0$. Abbiamo quindi dimostrato la (4).

Come abbiamo già detto, la dimostrazione della (3) è molto simile, e viene lasciata al lettore (muggiti di scontento).