SUCCESSIONI

Dato un insieme E, di oggetti qualsiasi, chiamiamo successione di elementi di E una qualunque funzione da $I\!N$ in E. Quindi una successione di procioni(*Procyon lotor*) sarà una funzione da $I\!N$ nell'insieme dei procioni (ci interessa poco), mentre una *successione di numeri reali* (quelle che useremo quasi sempre) sarà una funzione da $I\!N$ nell'insieme $I\!R$ dei numeri reali.

Se $a : I\!N \to I\!R$ è una successione di numeri reali, l'immagine del generico intero n (che a rigore andrebbe indicata con $a(n)$, come ogni brava funzione) viene spesso indicata con a_n. Si tende a considerare come *successione* anche una funzione che non sia definita proprio **su tutto** $I\!N$, ma solo per gli $n \in I\!N$ da un certo n_0 in poi. Ad esempio, la funzione $n \to 1/n$ viene comunemente considerata una successione, anche se non è definita per $n = 0$. Per il momento, supporremo che le nostre successioni siano definite su tutto $I\!N$. Poi faremo finta di niente, e chiameremo *successione* anche la $1/n$. Se volessi essere più preciso incasinerei le cose notevolmente, e non voglio farlo.

Vediamo ora alcune **importanti definizioni**. Una successione a di numeri reali è detta

- *non decrescente* se
$$\forall n,\, m \in I\!N \qquad \{n \leq m\} \Rightarrow \{a(n) \leq a(m)\} \tag{1}$$

- *non crescente* se
$$\forall n,\, m \in I\!N \qquad \{n \leq m\} \Rightarrow \{a(n) \geq a(m)\} \tag{2}$$

- *strettamente crescente* se
$$\forall n,\, m \in I\!N \qquad \{n < m\} \Rightarrow \{a(n) < a(m)\} \tag{3}$$

- *strettamente decrescente* se
$$\forall n,\, m \in I\!N \qquad \{n < m\} \Rightarrow \{a(n) > a(m)\} \tag{4}$$

- **monotòna** se verifica almeno una delle quattro proprietà (1)-(4) scritte sopra.

Inoltre una successione a di numeri reali è detta

- *limitata superiormente* se
$$\exists K \in I\!R | \quad a(n) \leq K \quad \forall n \in I\!N \tag{5}$$

- *limitata inferiormente* se
$$\exists K \in I\!R | \quad a(n) \geq K \quad \forall n \in I\!N \tag{6}$$

- **limitata** se è sia limitata superiormente che limitata inferiormente. In altre parole, a è limitata se
$$\exists K \in I\!R | \quad |a(n)| \geq K \quad \forall n \in I\!N. \tag{7}$$