Enunciato Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora f è limitata.

Dimostrazione

Dimostreremo che la f è limitata superiormente. Con un ragionamento analogo si può dimostrare che f è limitata inferiormente.

Per tutti gli interi k costruiamo l'insieme

$$\mathcal{M}_k = \{x \in [a,b] \text{ tali che } f(x) \geq k\}. \tag{1}$$

Avremo ovviamente che

$$\mathcal{M}_{k+1} \subseteq \mathcal{M}_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Il fatto che f è limitata superiormente può anche essere espresso dicendo che esiste un k_0 tale che $\mathcal{M}_{k_0}$ è vuoto (infatti in tal caso avremmo $f(x) < k_0$ per ogni $x \in [a,b]$ e k_0 sarebbe una barriera superiore per f).

Quindi se facciamo vedere che è impossibile che gli $\mathcal{M}_k$ siano tutti non vuoti abbiamo finito. Per contradizione, supponiamo quindi che gli $\mathcal{M}_k$ siano tutti non vuoti (e vediamo che questo ci porterà a contradire l'ipotesi). Procedendo come nel Lemma della montagnetta, poniamo, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_k := \inf \mathcal{M}_k. \tag{3}$$

Abbiamo che la successione α_k è ovviamente limitata (perché $a \leq \alpha_k \leq b$) e anche non decrescente (dalla (2)); inoltre (per il lemma della montagnetta)

$$f(\alpha_k) = k \qquad \forall k > f(a). \tag{4}$$

Per il teorema fondamentale sulle successioni monotone la successione α_k avrà un limite finito

$$\alpha^* := \lim_{k \to +\infty} \alpha_k \tag{5}$$

che (per la permanenza del segno) sarà anch'esso in $[a,b]$. La f, per ipotesi, è continua in α^*. Dal Lemma di commutazione e dalla (4) si avrebbe allora

$$f(\alpha^*) \equiv f(\lim_{k \to +\infty} \alpha_k) = \lim_{k \to +\infty} f(\alpha_k) = \lim_{k \to +\infty} k = +\infty \tag{6}$$

che è impossibile (un numero reale sarebbe uguale a $+\infty$).