Teorema di Weierstrass (con massimi e minimi)

Enunciato Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora esistono x_m e x_M in $[a,b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{1}$$

Dimostrazione

Dimostreremo che l'esistenza di x_M. Con un ragionamento analogo si può dimostrare l'esistenza di x_m. Per tutti gli $y \in \mathbb{R}$ costruiamo l'insieme

$$\mathcal{M}_y = \{x \in [a,b] \text{ tali che } f(x) \geq y\}. \tag{2}$$

Avremo ovviamente che se $y_1 < y_2$ allora

$$\mathcal{M}_{y_2} \subseteq \mathcal{M}_{y_1}. \tag{3}$$

Sia $\mathbb{Y}$ l'insieme degli y per i quali $\mathcal{M}_y$ è non vuoto. Per ogni $y \in \mathbb{Y}$ definiamo

$$\alpha(y) : \inf \mathcal{M}_y. \tag{4}$$

La funzione α è sicuramente limitata; infatti $a \leq \alpha(y) \leq b$ per ogni $y \in \mathbb{Y}$. Inoltre per la (3) abbiamo che la funzione α è monotona non decrescente. Infine per il Lemma della montagnetta abbiamo

$$f(\alpha(y)) = y \qquad \forall y \in \mathbb{Y} \text{ con } y \geq f(a). \tag{5}$$

Poniamo $\alpha^* := \sup\limits_{y \in \mathbb{Y}} \alpha(y)$, che sicuramente sta in $[a,b]$ (perché?). Supponiamo che $\mathbb{Y}$ non sia limitato superiormente (questo dovrebbe portarci a una contradizione). Se così fosse, infatti, avremmo

$$\alpha^* := \lim_{y \to +\infty} \alpha(y) \tag{6}$$

da cui, per il teorema sui limiti delle funzioni composte (usando la (5) nell'ultimo passaggio):

$$f(\alpha^*) := \lim_{y \to +\infty} f(\alpha(y)) = \lim_{y \to +\infty} y = +\infty \tag{7}$$

che è impossibile: $f(\alpha^*)$ è un numero reale e non può essere uguale a $+\infty$. Quindi $\mathbb{Y}$ è limitato superiormente (e in particolare deduciamo che la f è limitata superiormente). Chiamiamo y^* l'estremo superiore di $\mathbb{Y}$, che coinciderà con l'estremo superiore della immagine di f. Cerchiamo quindi un x_M tale che $f(x_M) = y^*$. Se per caso $f(a) = y^*$ possiamo prendere $x_M := a$. Se invece $y^* > f(a)$ procediamo come segue: osserviamo dapprima che adesso, invece della (7), abbiamo

$$\alpha^* := \lim_{y \to y^*} \alpha(y). \tag{8}$$

Poi applichiamo il teorema sul limite delle fuzioni composte alla (8), osservando che per $y > f(a)$ si ha $f(\alpha(y)) = y$ (dalla (5)). Quindi

$$f(\alpha^*) := \lim_{y \to y^*} f(\alpha(y)) = \lim_{y \to y^*} y = y^*. \tag{9}$$

Possiamo quindi porre $x_M := \alpha^*$.