Lemma di commutazione

Enunciato

Sia $[a, b]$ un intervallo, e $x : \mathbb{N} \to [a, b]$ una successione di elementi di $[a, b]$. Sia f una funzione $[a, b] \to \mathbb{R}$. Sia $x^* \in [a, b]$. Supponiamo che:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x^* \tag{1}$$

$$\text{f è continua in } x^*. \tag{2}$$

Allora si ha

$$x^* \in [a, b]. \tag{3}$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x^*). \tag{4}$$

Dimostrazione

Osserviamo per prima cosa che, grazie alla (1), la tesi (4) può anche essere scritta

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n), \tag{5}$$

che spiega il nome del lemma: infatti si vede che $\lim_{n \to +\infty}$ e f *commutano* (che, per le mucche, vuol dire che *possono essere scambiate di posto*).

Osserviamo ora che la (3) è una banale conseguenza del teorema della permanenza del segno (per successioni). Infatti per ogni n si ha $x_n - a \geq 0$ per cui, al limite, $x^* - a \geq 0$, cioè $x^* \geq a$. In modo analogo si verifica che $x^* \leq b$.

Veniamo ora alla cosa più seria, cioè alla dimostrazione di (4). Espandendo la definizione di limite in (4) possiamo riscrivere la tesi come

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n^* \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n^* \quad |f(x_n) - f(x^*)| \leq \varepsilon. \tag{6}$$

Per dimostrare la (6) possiamo giocarci la (1) e la (2). Per ogni $\varepsilon > 0$ usiamo dapprima la (2) e abbiamo

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in [a, b] \quad \{|x - x^*| \leq \delta\} \Rightarrow \{|f(x) - f(x^*)| \leq \varepsilon\}. \tag{7}$$

Usiamo ora il δ così ottenuto dalla (7). Espandendo la definizione di limite (1) abbiamo, in generale

$$\forall \eta > 0 \ \exists n_\eta \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\eta \quad |x_n - x^*| \leq \eta. \tag{8}$$

Muggiti sconvolti!! Perché chiama η quello che di solito si chiama ε?? Calma, calma! Non posso chiamarlo ε perché è un nome che ho già usato. Inoltre, tra un attimo prenderò $\eta = \delta$, dove δ è proprio il valore ottenuto dalla (7) a partire dall'ε da cui sono partito. Poi decido di prendere come n^* proprio l' $n_\eta = n_\delta$ ottenuto tramite la (8). In questo modo la mia costruzione può essere riassunta come

$$\varepsilon \to \delta =: \eta \to n_\eta =: n^*. \tag{9}$$

Vediamo cosa succede se prendo un $n \geq n^*$. Avendo preso $n^* = n_\eta$ avrò $|x_n - x^*| \leq \eta \equiv \delta$. Ponendo allora $x = x_n$ nella (7) ottengo $|f(x_n) - f(x^*)| \leq \varepsilon$, In definitiva ho

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n^* \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n^* \quad |f(x_n) - f(x^*)| \leq \varepsilon,$$

che è proprio la (6).