Definizione di *limite di una successione*

La definizione di *limite di una successione di numeri reali* si articola in quattro sottocasi, a seconda che il limite sia un numero reale ℓ, oppure uno dei tre simboli $+\infty$, $-\infty$ e ∞. Vediamoli separatamente.

Limite = $\ell \in \mathbb{R}$. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di numeri reali, e sia ℓ un numero reale. Diciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \tag{1}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \{n \geq n_0\} \Rightarrow \{|a_n - \ell| \leq \varepsilon\} \tag{2}$$

Limite = $+\infty$. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Diciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \tag{3}$$

se

$$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \{n \geq n_0\} \Rightarrow \{a_n \geq M\}. \tag{4}$$

Limite = $-\infty$. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Diciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \tag{5}$$

se

$$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \{n \geq n_0\} \Rightarrow \{a_n \leq M\}. \tag{6}$$

Limite = ∞. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Diciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \tag{7}$$

se

$$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \{n \geq n_0\} \Rightarrow \{|a_n| \geq M\}. \tag{8}$$

A seconda dei quattro casi, si usano quattro termini diversi per denotare il comportamento della successione.

- Se il limite esiste finito, la successione si dice convergente.
- Se il limite è uguale a $+\infty$, la successione si dice divergente a $+\infty$.
- Se il limite è uguale a $-\infty$, la successione si dice divergente a $-\infty$.
- Se il limite è uguale a ∞, la successione si dice divergente.

Una successione si dice limitata se esistono due barriere m e M tali che $m \leq a_n \leq M$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. In alcuni testi, una successione che non ha limite (di nessuno dei quattro tipi visti sopra) si dice *oscillante*. In altri testi tale nome (*oscillante*) viene riservato solo alle successioni che sono limitate ma non hanno limite. (Muggiti perplessi)