Idea generale

Le definizioni che seguono sono una sequela noiosissima di simboli e quantificatori. Siete sconsigliati dall'impararli a memoria. Ma li dovete sapere tutti. Come fare? In realtà c'è un solo **concetto** di limite (quello che non è per dilettanti). Imparato quello, tutti i casi particolari ne discendono per conseguenza. Cominciamo allora da quello. La struttura delle varie definizioni di limite è sempre la stessa:

$$\lim_{x\to\clubsuit} f(x) = \diamondsuit \tag{1}$$

Nei vari casi, $\diamondsuit$ potrà essere: $\ell,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$, mentre $\clubsuit$ potrà essere $x_0,\ x_0+,\ x_0-,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$.

La (1), come abbiamo già visto, può essere interpretata, a grosse spanne, nel modo seguente. Ogni volta che venga precisato cosa si intende per $f(x)$ è sostanzialmente equiparabile a $\diamondsuit$, se la (1) è vera deve essere possibile precisare cosa si intende per x è vicino a $\clubsuit$ in modo tale che risulti: per ogni x vicino a $\clubsuit$ (ma non uguale!!) il corrispondente $f(x)$ è sostanzialmente equiparabile a $\diamondsuit$. Questo è quello che dovete aver capito. Pensateci bene. Una volta capito questo, il resto è facile.

Vediamo come le precisazioni di cui abbiamo parlato possono essere fatte, nei vari casi.

Abbiamo già visto che, se $\diamondsuit = \ell$ (numero reale) la frase $f(x)$ è sostanzialmente equiparabile a $\diamondsuit$ può essere precisata fissando un ε positivo e richiedendo $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Se invece $\diamondsuit = +\infty$ la stessa frase potrà essere precisata fissando un M reale e richiedendo che $f(x) \geq M$. Vedremo dopo la lista di tutti i casi possibili.

Abbiamo anche visto che, se $\clubsuit = x_0$ (numero reale) la frase x è vicino a $\clubsuit$ può essere precisata fissando un δ positivo e richiedendo $|x - x_0| < \delta$. Se invece $\clubsuit = +\infty$ la stessa frase potrà essere precisata fissando un K reale e richiedendo che $x \geq K$.

Vediamo ora la lista dei casi possibili per $\clubsuit$ e $\diamondsuit$ e come possono essere precisati.

La frase $f(x)$ è sostanzialmente equiparabile a $\diamondsuit$, nei vari casi, diventa

- Per $\diamondsuit = \ell \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
- Per $\diamondsuit = +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq M$
- Per $\diamondsuit = -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq M$
- Per $\diamondsuit = \infty \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \geq M$

Analogamente la frase x vicino a $\clubsuit$ (ma non uguale!!), nei vari casi, diventa

- Per $\clubsuit = x_0 \quad \Rightarrow \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta$
- Per $\clubsuit = x_0+ \quad \Rightarrow \quad x_0 < x \leq x_0 + \delta$
- Per $\clubsuit = x_0- \quad \Rightarrow \quad x_0 - \delta \leq x < x_0$
- Per $\clubsuit = +\infty \quad \Rightarrow \quad x \geq K$
- Per $\clubsuit = -\infty \quad \Rightarrow \quad x \leq K$
- Per $\clubsuit = \infty \quad \Rightarrow \quad |x| \geq K$

Ricordando questo, la noiosa lista che segue (di 24 casi!) dovrebbe essere *facile*

$$\lim_{x\to x_0} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\, x \quad [\,0 < |x - x_0| \leq \delta\,] \to [\,|f(x) - \ell| \leq \varepsilon\,]$$

$$\lim_{x\to x_0} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, M\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\, x \quad [\,0 < |x - x_0| \leq \delta\,] \to [\,f(x) \geq M\,]$$

$$\lim_{x\to x_0} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, M\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\, x \quad [\,0 < |x - x_0| \leq \delta\,] \to [\,f(x) \leq M\,]$$

$$\lim_{x\to x_0} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, M\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\, x \quad [\,0 < |x - x_0| \leq \delta\,] \to [\,|f(x)| \geq M\,]$$

$$\lim_{x \to x_0+} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x_0 < x \leq x_0 + \delta \,] \to [\, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \,]$$

$$\lim_{x \to x_0+} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x_0 < x \leq x_0 + \delta \,] \to [\, f(x) \geq M \,]$$

$$\lim_{x \to x_0+} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x_0 < x \leq x_0 + \delta \,] \to [\, f(x) \leq M \,]$$

$$\lim_{x \to x_0+} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x_0 < x \leq x_0 + \delta \,] \to [\, |f(x)| \geq M \,]$$

$$\lim_{x \to x_0-} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x_0 - \delta \leq x < x_0 \,] \to [\, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \,]$$

$$\lim_{x \to x_0-} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x_0 - \delta \leq x < x_0 \,] \to [\, f(x) \geq M \,]$$

$$\lim_{x \to x_0-} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x_0 - \delta \leq x < x_0 \,] \to [\, f(x) \leq M \,]$$

$$\lim_{x \to x_0-} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x_0 - \delta \leq x < x_0 \,] \to [\, |f(x)| \geq M \,]$$

$$\lim_{x \to +\infty} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x \geq K \,] \to [\, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \,]$$

$$\lim_{x \to +\infty} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x \geq K \,] \to [\, f(x) \geq M \,]$$

$$\lim_{x \to +\infty} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x \geq K \,] \to [\, f(x) \leq M \,]$$

$$\lim_{x \to +\infty} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x \geq K \,] \to [\, |f(x)| \geq M \,]$$

$$\lim_{x \to -\infty} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x \leq K \,] \to [\, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \,]$$

$$\lim_{x \to -\infty} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x \leq K \,] \to [\, f(x) \geq M \,]$$

$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x \leq K \,] \to [\, f(x) \leq M \,]$$

$$\lim_{x \to -\infty} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, x \leq K \,] \to [\, |f(x)| \geq M \,]$$

$$\lim_{x \to \infty} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, |x| \geq K \,] \to [\, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \,]$$

$$\lim_{x \to \infty} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, |x| \geq K \,] \to [\, f(x) \geq M \,]$$

$$\lim_{x \to \infty} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, |x| \geq K \,] \to [\, f(x) \leq M \,]$$

$$\lim_{x \to \infty} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \; \exists K \text{ t.c. } \forall x \quad [\, |x| \geq K \,] \to [\, |f(x)| \geq M \,]$$