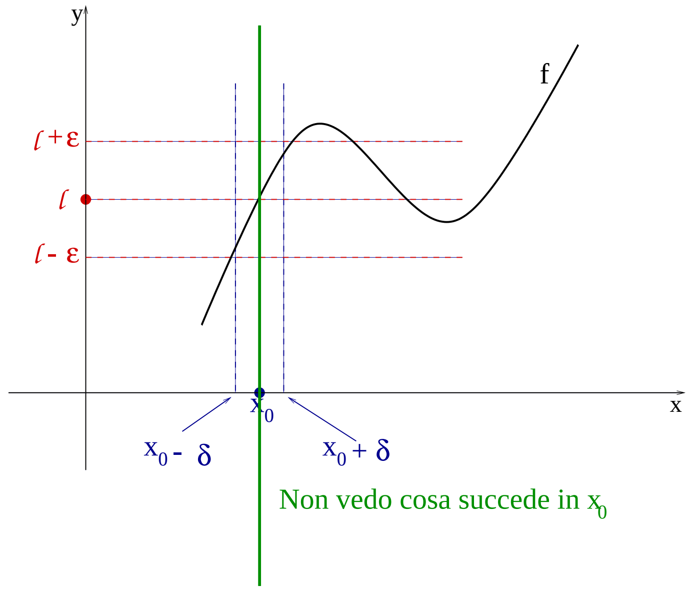

Definizione di limite

Sia $f : (a, b) \to I\!R$, sia x_0 un punto interno ad (a, b) e sia $\ell \in I\!R$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

vuol dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in (a, b) : \quad [\, 0 < |x - x_0| \le \delta \,] \;\Rightarrow\; [\, |f(x) - \ell| \le \varepsilon \,]$$

Osservazioni importanti:

- La funzione f (anche se non l'abbiamo esplicitamente detto nella definizione) *potrebbe anche non essere definita nel punto* x_0. In ogni caso, **il valore di f in x_0, se anche esiste, non ha nessuna importanza**. Si noti che la richiesta $0 < |x - x_0|$ (che non va assolutamente dimenticata!) esclude proprio che si possa prendere $x = x_0$.
- Le parti colorate in rosso descrivono relazioni tra elementi dell'asse y.
- Le parti colorate in blu descrivono relazioni tra elementi dell'asse x.
- La quantità ε è una tolleranza. **Deve essere strettamente positiva**. Quando prescrivo ε sto, in un certo senso, decidendo cosa sono disposto a ritenere trascurabile nella scala delle y.
- La quantità δ è una vicinanza. **Deve essere strettamente positiva**. Il valore di δ (che dipende dal valore scelto per ε) mi dice quanto devo avvicinarmi a x_0, nella scala delle x, per essere sicuro che la differenza $|f(x) - \ell|$ sia trascurabile (nel senso dell' ε scelto in precedenza).

N.B. La definizione di limite **non è per dilettanti**. Molti studiosi dell'apprendimento ritengono che ci sia una stretta relazione tra la difficoltà di un concetto e il numero di quantificatori usati per descriverlo (in soldoni muccosi: quanti $\forall$ e $\exists$ si usano). Per definire il limite come è stato fatto qui, si usano **tre** quantificatori: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x$...etc. Sono tanti! Abbiate un sano rispetto per la difficoltà di questo concetto. È **pericoloso** pensare di averlo capito rapidamente.