Teorema della permanenza del segno per le successioni

Enunciato Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di numeri reali, e sia ℓ un numero reale **positivo**. Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell. \tag{1}$$

Allora (questa è la tesi, mucche) si ha che esiste un n_0 in $\mathbb{N}$ tale che per tutti gli n maggiori o uguali a n_0 i valori di a_n siano positivi. In linguaggio matematico questo si esprime dicendo

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n > 0. \tag{2}$$

Dimostrazione Ricordando la definizione di limite per successioni si ha che (1) equivale a

$$\forall \varepsilon \geq 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - \ell| \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Osserviamo che la disuguaglianza $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ è del tutto equivalente a

$$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon. \tag{4}$$

Siccome ε è a nostra scelta (stiamo *usando* la (3), mucche! Non la stiamo *dimostrando*!) è sufficiente prendere un ε positivo (perché dobbiamo) e strettamente minore di ℓ (perché siamo furbi) per avere che la prima disuguaglianza di (4) implichi

$$a_n \geq \ell - \varepsilon > 0 \tag{5}$$

(e la seconda disuguaglianza di (4) la buttiamo via: è vera ma non ci serve). Per esempio possiamo prendere $\varepsilon = \ell/2$, che va sempre bene quando ℓ (come abbiamo messo nelle ipotesi) è positivo. Riassumendo, se usiamo la (3) con $\varepsilon = \ell/2$ otteniamo

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq \ell - \varepsilon = \ell/2 > 0, \tag{6}$$

che è esattamente la tesi (2). Le mucche annuiscono vigorosamente.

Osservazione 1 Osserviamo che, con un linguaggio più colloquiale, l'enunciato precedente può essere spresso come: **se il limite è positivo, allora la successione, da un certo indice in poi, è tutta positiva**.

Osservazione 2 Ovviamente, potremmo enunciare e dimostrare un risultato analogo per i casi in cui il limite è negativo: **se il limite è negativo, allora la successione, da un certo indice in poi, è tutta negativa**. Per la dimostrazione basterebbe cambiare di segno alla successione (e quindi al suo limite), riconducendosi al caso già dimostrato.

Nella maggioranza delle applicazioni (cioè nel dimostrare i teoremi successivi) la proprietà della permanenza del segno viene usata in una forma leggermente diversa, anche se equivalente. Si ha infatti il seguente corollario.

Corollario Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Se, da un certo indice in poi, gli a_n sono tutti ≥ 0 allora (tesi): il limite degli a_n, se esiste, è anch'esso ≥ 0.

Dimostrazione La tesi equivale a dire che la nostra successione non può avere un limite negativo (le mucche ci pensano sopra, ma alla fine si dicono d'accordo). Ma questo è ovvio: se avesse un limite negativo, grazie alla Osservazione 2, tutti i suoi termini da un certo indice in poi (diciamo "da 174 in poi") sarebbero negativi, il che è impossibile: infatti per ipotesi sappiamo che la nostra successione, da un certo indice in poi, (diciamo "da 1285 in poi") è fatta tutta di termini ≥ 0.

Per finire vediamo una modesta variante del teorema, che dovrebbe interesserare solo le mucche. Dagli studenti normali che hanno già visto il teorema precedente mi aspetterei un "ma è ovvio!".

Modesta Variante Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty. \tag{7}$$

Allora si ha che esiste un n_0 in $\mathbb{N}$ tale che per tutti gli n maggiori o uguale a n_0 i valori di a_n siano positivi.

Dimostrazione (solo per le mucche). Espandendo la (7) si ha

$$\forall K \geq 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq K. \tag{8}$$

Prendendo ad esempio $K = 1$, si ha quindi

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq 1 > 0, \tag{9}$$

cioè la tesi.

Osservazione Avremmo potuto *dimostrare prima la modesta variante* e poi dedurre la dimostrazione del caso in cui il limite è $\ell > 0$ nel seguante modo: dalla (1) si deduce facilmente che la successione ausiliaria b, definita da

$$b_n := (n+1)a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

tende a $+\infty$. Applicando la Modesta Variante alla b si ottiene che tutti i b_n, da un certo indice in poi, sono positivi. Ma allora, a partire dallo stesso indice, sono positivi anche gli a_n, visto che moltiplicano o dividendo per $n+1$ il segno non cambia.

È strano che questo modo di procedere non venga mai usato nei libri di testo... Ci deve essere qualche inghippo didattico.

Una mucca chiede: "perchè ha usato $n+1$ invece di n?" Risposta: per non dividere per n, che è proibito quando n è zero; ovviamente, visto che ragioniamo "da un certo indice in poi", il caso n uguale a zero non ci interessa affatto. Ma ci sarebbe sempre qualche studente che vuole mettersi in mostra segnalando che la divisione per n non può essere fatta *per tutti gli* n. Per evitarlo avrei quindi dovuto dire che lo facevo solo per n positivo, visto che il segno del primo termine è irrilevante. Avrei perso tempo. Ho perso tempo comunque, con questa spiegazione alla mucca. Anzi, forse ne ho perso di più. Misteri della didattica.