Teorema delle successioni monotone

Enunciato

Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione monotona e limitata. Allora a è convergente.

Dimostrazione

Per semplicità dimostreremo che *ogni successione di di numeri reali i) non decrescente e ii) limitata superiormente è convergente*. In modo analogo si può dimostrare che *ogni successione di numeri reali non crescente e limitata inferiormente è convergente*, da cui segue il risultato completo.

Ricordiamo che una successione di numeri reali si dice *non decrescente* quando

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : \qquad \{n_1 < n_2\} \Rightarrow \{a_{n_1} \leq a_{n_2}\}. \tag{1}$$

Ricordiamo anche che una successione di numeri reali si dice *limitata superiormente* quando

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M. \tag{2}$$

Ricordiamo infine che una successione di numeri reali si dice *convergente* quando

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell. \tag{3}$$

Siamo pronti per la dimostrazione vera e propria. Consideriamo *l'insieme immagine* di a, cioè l'insieme

$$A := \{a_n, \ n \in \mathbb{N}\}. \tag{4}$$

L'insieme A è sicuramente *non vuoto* (ad esempio, contiene a_0). Inoltre, grazie alla (2) abbiamo che ogni elemento di A è minore o uguale a M, e quindi l'insieme A è anche *limitato superiormente*. Quindi esiste l'*estremo superiore di* A, che chiamiamo ℓ. Grazie alle *due proprietà dell'estremo superiore* abbiamo:

$$\forall a_n : \quad a_n \leq \ell \tag{5}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n^* \in \mathbb{N} : \ell - \varepsilon < \quad a_{n^*}. \tag{6}$$

Usando ora la (1) insieme alla (6), e all'ultimo la (5) (e il fatto che ε ̀positivo) si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n^* \in \mathbb{N} : \forall n > n^* \ell - \varepsilon \leq \quad a_{n^*} \leq a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$$

da cui si estrae immediatamente (togliendo qualche passaggio intermedio)

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n^* \in \mathbb{N} : \forall n > n^* \ell - \varepsilon \leq \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$$

che è proprio la (3) che volevamo dimostrare.