CRITERI DI CONVERGENZA PER LE SERIE

Il criterio più semplice è il seguente.

Teorema(condizione necessaria per la convergenza). Sia a_0, a_1, $a_2, \dots$ una successione di numeri reali. Se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è convergente, allora si *deve avere*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \tag{1}$$

Dimostrazione. È facile vedere che, per ogni $n \in I\!N$, si ha

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}. \tag{2}$$

Se la serie degli a_n converge, allora $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1} = S$. Passando al limite nella (2) otteniamo $S = S + \lim_{n\to+\infty} a_n$ da cui segue il risultato.

CRITERI PER LE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Considerazioni generali sulle serie a termini non negativi

- **1** $\{\forall\, k \geq 1\ a_k \geq 0\} \Leftrightarrow \{$ la successione s delle somme parziali è monotòna non decrescente$\}$
  Infatti per ogni $k \geq 1$ si ha $s_k = s_{k-1} + a_k$ quindi $\{a_k \geq 0\} \Leftrightarrow \{s_k \geq s_{k-1}\}$

- **2** $\{\forall\, k \geq 1\ a_k \geq 0\} \Rightarrow \{\ \{$ la successione s è limitata$\} \Leftrightarrow \{$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge $\}\ \}$

  Infatti, per **1**, se gli a_k sono ≥ 0 per $k \geq 1$ deduciamo che la la successione s è monotòna non decrescente. Per un teorema fondamentale di Analisi A, una successione monotòna ha limite finito se e solo se è limitata. Ma, per la definizione di serie, dire che s ha limite finito coincide col dire che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

Criterio del confronto(versione-base). Siano a e b due successioni tali che

$$0 \leq a_k \leq b_k \qquad \forall\, k \in I\!N \tag{3}$$

Allora

$$\{ \text{ la serie. } \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge } \} \Rightarrow \{ \text{ la serie } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge } \}.$$

Dimostrazione Poniamo

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Dalla (3) abbiamo ovviamente

$$0 \leq s_n \leq t_n \qquad \forall\, n \in I\!N. \tag{4}$$

Quindi, applicando **2**, poi (4) e poi ancora **2** abbiamo

$$\{ \text{ la } \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge } \} \Rightarrow \{ \text{ la succ. } t \text{ è limitata} \} \Rightarrow \{ \text{ la succ. } s \text{ è limitata} \} \Rightarrow \{ \text{ la } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge } \}$$

e quindi la tesi è dimostrata.

Il teorema del confronto ha una *versione più elaborata*, che si deduce facilmente dalla *versione base*. Ci limitiamo ad enunciarla.

Criterio del confronto(versione elaborata). Siano a e b due successioni tali che esistano un intero k_0 e un numero reale $C > 0$ tali che

$$0 \leq a_k \leq C b_k \qquad \forall\, k \geq k_0. \tag{5}$$

Allora

$$\{ \text{ la serie. } \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge } \} \Rightarrow \{ \text{ la serie } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge } \}.$$

Dal criterio del confronto si deduce poi il criterio del rapporto.

Criterio del rapporto(versione base). Sia a una successione *a termini positivi* (cioè tale che $a_k > 0$ per ogni $k \in I\!N$). Allora:

- **se** esiste un numero $c < 1$ tale che

  $$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq c \quad \forall\, k \in I\!N \tag{6}$$

  allora la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge ;

- **se** invece esiste un numero reale $C > 1$ tale che che

  $$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq C \quad \forall\, k \in I\!N \tag{7}$$

  allora la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge .

Dimostrazione Consideriamo la prima delle due affermazioni, e scriviamo la (6) successivamente per $k = 0$, poi per $k = 1$, poi per $k = 2$, eccetera. Abbiamo (moltiplicando per a_0, che è positivo)

$$\frac{a_1}{a_0} \leq c \Rightarrow a_1 \leq c\, a_0.$$

Usando questa relazione (cioè $a_1 \leq c\, a_0$) si ha allora:

$$\frac{a_2}{a_1} \leq c \Rightarrow a_2 \leq c\, a_1 \leq c\,(c\, a_0) = c^2 a_0.$$

Usando quest'ultima relazione (cioè $a_2 \leq c^2\, a_0$) si ha allora:

$$\frac{a_3}{a_2} \leq c \Rightarrow a_3 \leq c\, a_2 \leq c\,(c^2\, a_0) = c^3 a_0$$

.

Procedendo in questo modo si ha quindi:

$$a_k \leq c^k a_0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

.

Ma, visto che $0 < c < 1$ la serie (geometrica) $\sum_{k=0}^{+\infty} c^k a_0 = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} c^k$ converge. Ed il risultato segue dal criterio del confronto. In modo analogo, per la seconda affermazione, dalla (7) segue invece che

$$a_k \geq C^k a_0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Questo impedisce, in particolare, che si possa avere $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Quindi, per la *condizione necessaria per la convergenza* otteniamo che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ non può convergere (e, anzi, si vede facilmente che diverge a $+\infty$).

Anche il criterio del rapporto ha una versione più elaborata, in cui la (6) e la (7) sono richieste solo da un certo indice k_0 in poi. Non la riportiamo. Enunciamo invece (senza dimostrazione) una versione *ancora più raffinata* che è molto comoda in pratica.

Criterio del rapporto asintotico. Sia a una successione *a termini positivi* (cioè tale che $a_k > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$). Consideriamo il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}. \tag{8}$$

Si ha allora

$$\textbf{se} \text{ il limite (8) } \begin{cases} \text{è minore di 1} & \textbf{allora} \text{ la serie } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge} \\ \text{è maggiore di 1} & \textbf{allora} \text{ la serie } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ diverge} \\ \text{è uguale a 1, oppure non esiste} & \textbf{allora} \text{ il criterio è inefficace.} \end{cases}$$

Si ha infine il seguente (utilissimo) *criterio del confronto con un integrale*. Vediamone una versione semplificata.

Teorema di Mac Laurin (del confronto con un integrale). Sia $f : [1, +\infty[\to I\!R$ una funzione monòtona non crescente, tale che

$$\lim_{x \to +\infty} = 0.$$

Allora (tesi)

$$\{ \text{ la serie } \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \text{ converge } \} \Leftrightarrow \{ \text{ l'integrale } \int_1^x f(t)\mathrm{d}t \text{ ha limite finito per } x \to +\infty \}$$

Idea della dimostrazione. Su ogni subintervallo $[k, k+1]$, con $k \geq 1$, si ha, per la monotonia di f,

$$f(k) \geq f(t) \geq f(k+1) \qquad \forall t \in [k, k+1].$$

Integrando su $[k, k+1]$ (intervallo di lunghezza $= 1$) si ha

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \geq f(k+1),$$

e sommando per k da 1 a n

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \equiv \sum_{k=2}^{n+1} f(k).$$

A questo punto osserviamo che il primo e l'ultimo termine hanno limite finito per $k \to +\infty$ **se e solo se** la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ converge. Il risultato segue abbastanza facilmente.

L'*utilità* di tale teorema si vede applicandolo alle serie del tipo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \tag{9}$$

con α reale > 0. Infatti ponendo $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ il comportamento dell'integrale si può studiare facilmente (ha limite finito **se e solo se** $\alpha < 1$). Se ne deduce che la serie (9) converge **se e solo se** $\alpha < 1$.

CRITERI PER LE SERIE A TERMINI REALI QUALSIASI

Teorema(della convergenza assoluta). Sia a una successione di numeri reali. **Se** la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \tag{10}$$

è convergente, **allora** anche la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{11}$$

converge.

Dimostrazione. Cerchiamo altre due successioni, b e c, in modo tale che

$$0 \leq b_k \leq |a_k| \qquad 0 \leq c_k \leq |a_k| \qquad \forall\, k \in I\!N \tag{12}$$

e che

$$a_k = b_k - c_k \qquad \forall\, k \in I\!N. \tag{13}$$

Sorprendentemente, esiste *uno e un solo modo* per costruire b e c. Provate a scrivere $3 = B - C$ con $0 \leq B \leq 3$ e $0 \leq C \leq 3$: trovate solo $B = 3$ e $C = 0$. E se provate a scrivere $-3 = B - C$ con $0 \leq B \leq 3$ e $0 \leq C \leq 3$: trovate solo $B = 0$ e $C = 3$ (muggiti di sorpresa). Nel nostro caso abbiamo

$$b_k = \frac{|a_k| + a_k}{2} \qquad\qquad c_k = \frac{|a_k| - a_k}{2} \qquad \forall\, k \in I\!N. \tag{14}$$

A questo punto il gioco è praticamente finito. Usando il criterio del confronto e le (12) si ha che, **se** la serie (10) converge, **allora** convergono entrambe le serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k .$$

Ma **allora**, usando la (13), converge anche la serie (11), come differenza di due serie entrambe convergenti.

L'ultimo criterio che consideriamo si rivolge solo a serie *di tipo molto particolare*. Ma su tali serie risulta *estremamente efficace*

Teorema di Leibniz(sulle serie a termini di segno alterno). Sia p una successione di numeri reali **monotòna non crescente**, cioè verificante

$$p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq .... \geq p_k \geq ... \tag{15}$$

e **infinitesima**, cioè verificante

$$\lim_{k \to +\infty} p_k = 0. \tag{16}$$

Costruiamo una nuova successione a_k come

$$a_k = (-1)^k p_k. \tag{17}$$

Allora (tesi): la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{18}$$

converge.

Dimostrazione Notiamo che dalla (15) e dalla (16) scende facilmente che deve essere $p_k \geq 0$ per ogni k. Anzi, se anche uno solo dei p_k risultasse nullo, allora tutti i termini successivi sarebbero identicamente 0, e quindi la serie sarebbe ridotta alla somma di un numero finito di addendi, e in particolare convergerebbe (un caso, comunque, poco interessante). Quindi possiamo pensare che i p_k siano tutti *positivi*. E infatti li abbiamo chiamati p...

Ne consegue che il segno degli a_k, dalla (17), risulta essere positivo per k pari, e negativo per k dispari (da cui il nome *serie a segni alterni*)

Ma, bando alle ciance, vediamo la dimostrazione. Costruiamo come al solito la successione s delle somme parziali

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{19}$$

ed osserviamo subito che $s_0 = a_0 = p_0$ è positivo, e che $s_1 = a_0 + a_1 = p_0 - p_1$ è anch'esso positivo, grazie alla (15). Adesso confrontiamo tra loro le s_k con gli indici *pari*. Abbiamo, ad esempio,

$$s_{28} = s_{26} + a_{27} + a_{28} = s_{26} - p_{27} + p_{28} \leq s_{26}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la (15). Se ne "deduce" che, in generale,

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq ... s_{26} \geq s_{28} \geq ...$$

Confrontando invece gli indici dispari abbiamo

$$s_{29} = s_{27} + a_{28} + a_{29} = s_{27} + p_{28} - p_{29} \geq s_{27}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato ancora la (15). Se ne "deduce" che, in generale,

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq ... s_{27} \leq s_{29} \leq ...$$

Insomma: gli s con gli indici dispari *salgono* e quelli con gli indici pari *scendono*. Mmmm! Confrontiamo adesso due s con indici successivi:

$$s_{28} = s_{27} + a_{28} = s_{27} + p_{28} \geq s_{27}.$$

E, in generale, ogni s_n con n dispari risulta minore dell's_n successivo. Da questo, e dalle relazioni precedenti, abbiamo che **ogni** s_n è compreso tra 0 e s_0. Infatti, ad esempio, per $n = 157$ abbiamo

$$0 < s_1 \leq ... \leq s_{157} \leq s_{158} \leq ... \leq s_0$$

e per $n = 240$ abbiamo

$$0 < s_1 \leq ... \leq s_{239} \leq s_{240} \leq ... \leq s_0.$$

Ri-Mmmm! Considerando adesso la successione

$$s_1, s_3, s_5, ...$$

la troviamo monotòna e limitata. Quindi essa ha un limite finito, che chiamiamo S_d. Analogamente, considerando la successione

$$s_0, s_2, s_4, ...$$

troviamo che anch'essa è monotòna e limitata. Quindi anch'essa ha un limite finito, che chiamiamo S_p. Ma **i due limiti devono coincidere**. Infatti, utilizzando la (16) (che non avevamo ancora usato), si trova che, per ogni j,

$$s_{2j} = s_{2j-1} + a_{2j} = s_{2j-1} + p_{2j}$$

e passando al limite per j che tende a $+\infty$ si ottiene

$$S_p = S_d + 0.$$

Quindi le successioni degli s con gli indici pari e con gli indici dispari tendono allo stesso limite. Tale limite (e il passaggio è intuitivo, ma meno immediato da formalizzare di come sembra alle mucche) risulta "quindi" essere il limite di *tutta* la successione degli s. Ne deduciamo che la successione delle somme parziali s ha limite finito, e che quindi, ricordando la (19) e la definizione di serie, abbiamo che la serie (18) converge.