LE SERIE

Data una successione di numeri reali $a_1, a_2, a_3, ...$ (che sarà detta successione degli addendi), vogliamo sommare, se ci riusciamo, tutti gli addendi della successione, *nell'ordine dato.*

Per far questo, costruiamo una successione ausiliaria $s_1, s_2, s_3, ..$(che sarà detta successione delle somme parziali) così definita:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad etc.$$

Le (infinite) formule precedenti possono essere riassunte nell'unica formula

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \forall\, n = 1, 2, ...$$

A questo punto consideriamo il **limite**, se esiste, della successione della successione delle somme parziali

$$S = \lim_{n \to +\infty} s_n.$$

Tale limite potrebbe esistere finito, oppure potrebbe essere infinito, oppure potrebbe non esistere. Tutto dipende da come era stata presa la successione degli addendi iniziale (anche alle mucche sembra ragionevole che il risultato di una somma dipenda dagli addendi: infatti annuiscono vigorosamente). Quindi

- Se il limite S esiste finito si dice che **la serie** degli addendi a_k **è convergente**. Il nostro tentativo di somma ha avuto successo, e diciamo che S è il risultato (o che S è la somma della serie). Noi siamo felici, noi siamo contenti (etc.), e scriviamo

  $$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

  .

- Altrimenti, si dice che **la serie** degli addendi a_k **non è convergente**.

Alcuni testi suddividono ulteriormente i casi di non convergenza: ad esempio, se il limite è $+\infty$ dicono che *la serie diverge a + infinito.* Oppure, se la successione delle somme parziali s_n è limitata ma non ha limite (muggiti di sorpresa), si dice che *la serie è oscillante.* E così via. In questo momento, però, non ce ne frega niente (muggiti di sollievo).

Nota: in generale, quando scriviamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \tag{1}$$

esprimiamo *un tentativo di sommare tutti gli addendi* a_k (nell'ordine prescritto dagli indici). Proditoriamente, viene usato lo stesso simbolo (**??**) per indicare il tentativo di somma e *anche* per indicare il risultato del tentativo stesso. Insomma, si confonde *l'operazione* (come ad esempio, l'*addizione*) con *il suo risultato* (che andrebbe correttamente chiamato *somma*). Nessuno confonderebbe l'*operazione di spremitura* di due arance con una *aranciata*, ma i matematici sono più pasticcioni di quanto si crede comunemente (muggiti perplessi).

Quando sappiamo che una serie è convergente possiamo porci altre domande. Ad esempio, possiamo considerare una *nuova* serie ottenuta prendendo come *nuovi* addendi **i valori assoluti** degli addendi precedenti, che, con modesta fantasia, chiamiamo la serie dei valori assoluti. Fatto questo, ci chiediamo se, per caso, anche la nuova serie risulta essere convergente.

- Se **anche** la serie dei valori assoluti
$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \tag{2}$$
è convergente, allora diciamo che la serie di partenza, cioè la $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, è **assolutamente convergente**
- Se invece la serie dei valori assoluti $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ **non** è convergente, allora diciamo che la serie di partenza, cioè la $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, è **semplicemente convergente**.

Quindi la serie (**??**) è assolutamente convergente se convergono entrambe la (**??**) e la (**??**). È invece semplicemente convergente se la (**??**) converge ma la (**??**) non converge.

A questo punto una mucca più ardimentosa delle altre chiede: " E se convergesse solo la (**??**) e non la (**??**)?". Ottima domanda. Ma questo *non succede mai* (muggito di sorpresa). Infatti:
Teorema(della convergenza assoluta). Sia $a_1, a_2, a_3, ...$ una successione di numeri reali. Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ è convergente, allora anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.

La dimostrazione è riportata altrove.

Esempio (la serie geometrica). Sia c un numero reale. Consideriamo la successione definita da $a_k := c^k$ per $k \in \mathbb{N}$. Siccome in questo caso partiamo da $k = 0$ la successione delle somme parziali s_n diventa $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, eccetera. Con facili calcoli si ottiene, se $c \neq 1$,

$$s_n \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}$$

(mucche: usate il prodotto notevole $(1 - c)(1 + c + c^2 + ...c^n) = 1 - c^{n+1}$), mentre per $c = 1$ si ha facilmente $s_n = n + 1$. Si ha quindi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-c} & \text{per } |c| < 1 \\ +\infty & \text{per } c \geq 1 \\ \infty & \text{per } c < -1 \\ \text{non esiste} & \text{per } c = \ -1. \end{cases} \tag{3}$$

Cioè: **serie geometrica** $\sum_{k=0}^{+\infty} c^k$ **converge se e solo se** $|c| < 1$, e allora la somma vale $\dfrac{1}{1-c}$.

COMPLEMENTI

Nelle "Figure sulle serie fondamentali" potete trovare dei disegni che potrebbero chiarire il comportamento di tre serie "campione":

- la serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \tag{4}$$

  (che è *divergente a* $+\infty$),

- la serie armonica a segni alterni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... \tag{5}$$

  (che è *semplicemente convergente*)

- la serie dei reciproci dei quadrati:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... \tag{6}$$

  (che è *assolutamemente convergente*).

Opportunamente stimolate, anche le mucche convengono che la serie (**??**) può essere pensata come "ottenuta dalla (**??**) prendendo i valori assoluti di ogni addendo". Quindi il fatto che essa sia *semplicemente convergente* si spiega col fatto che *lei* (cioè la (**??**)) converge, mentre la serie dei suoi valori assoluti (cioè la (**??**)) non converge.

Con ulteriori stimoli le mucche convengono che la (**??**) e la (**??**), avendo tutti gli addendi positivi, non avrebbero mai potuto essere *semplicemente convergenti.* Infatti ciascuna di esse coincide con la serie dei propri valori assoluti, mentre la convergenza semplice si ha proprio quando la serie ha un comportamento *diverso* da quello della serie dei valori assoluti (la serie stessa converge, e la serie dei valori assoluti non converge).

Tornando al problema dell'*ordine* con cui si sommano gli addendi, vale il seguente risultato (dovuto a Riemann) che viene qui enunciato in modo colloquiale: se una serie è assolutamente convergente, allora **gode** della proprietà commutativa della somma (che vale sempre quando gli addendi sono in numero finito): cambiando l'ordine di sommazione, il risultato non cambia. Se invece una serie è semplicemente convergente, allora **non gode** della proprietà commutativa: **anzi**, scelto un numero reale a caso (ad esempio, 28) esiste un modo di sommare, in ordine diverso, tutti gli stessi addendi (e ciascuno una sola volta) in modo che col nuovo ordine la somma faccia esattamente il numero prescelto (nel nostro caso, 28). Inoltre si può trovare un altro ordine di somma che faccia andare la serie a $+\infty$, un altro ancora che faccia andare la serie a $-\infty$, un altro ancora che renda la serie oscillante, etc. In parole rozze e povere: cambiando l'ordine di somma, *potete far fare alla serie quello che volete.* Muggiti di incredulo stupore.