SERIE DI POTENZE

Ad ogni successione di numeri reali a possiamo associare, per ogni $x \in I\!R$, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{1}$$

(con la convenzione che, in questo contesto, per $n = 0$ si abbia $x^n = 1$ per ogni x, incluso $x = 0$).

La (1) viene detta **serie di potenze di centro** 0. Ci poniamo vari problemi. Il primo, ovviamente, è il seguente: data la successione a, come sarà fatto l'insieme degli x per cui la (1) è convergente?

La risposta è, per certi versi, sorprendente. Infatti ci si potrebbe aspettare, al variare della successione a, di assistere ad un *vastissimo zoo* di comportamenti. Non è così. Si ha infatti il seguente **risultato fondamentale sulle serie di potenze**.

L'insieme C degli x per cui converge la (1) può essere fatto solo in uno dei seguenti modi:

- i) $C \equiv \{0\}$, cioè la (1) converge solo per $x = 0$.
- ii) $C \equiv I\!R$, cioè la (1) converge per ogni $x \in I\!R$.
- iii) Esiste un $R > 0$, tale che $]-R, R[\subseteq C \subseteq [R, R]$.

Notiamo che, nel caso *iii*), C è uno dei quattro possibili insiemi: $[-R, R]$, oppure $]-R, R]$, oppure $[-R, R[$, oppure $]-R, R[$. In particolare, nel caso *iii*) diciamo che *la serie di potenze ha raggio di convergenza* R. Per analogia, nel caso *i*) diremo che *la serie di potenze ha raggio di convergenza* 0, e nel caso *ii*) diremo che *la serie di potenze ha raggio di convergenza* $+\infty$.

Il **risultato fondamentale** precedente è una facile conseguenza del seguente teorema

Teorema 1 Sia a una successione di numeri reali, e sia $x_* \in I\!R$ un numero reale tale che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_*^n \tag{2}$$

converga. Allora per ogni $x \in I\!R$ tale che $|x| < |x_*|$ la serie (1) *converge assolutamente*.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che se $|x| < |x_*|$ allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n| \tag{3}$$

converge. Applichiamo il criterio del confronto , usando come *serie di confronto* la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{|x|}{|x_*|}\right)^n. \tag{4}$$

La serie (4) è una serie geometrica di ragione positiva e < 1 ; quindi è convergente. Se riusciamo a far vedere che esiste un n_0 tale che

$$|a_n x^n| \le \left(\frac{|x|}{|x_*|}\right)^n \tag{5}$$

per tutti gli $n \geq n_0$ abbiamo vinto. Moltiplicando e dividendo per $|x_*|^n$, con facili passaggi, si ha

$$|a_n x^n| = |a_n x_*^n| \frac{|x|^n}{|x_*|^n} = |a_n x_*^n| \Big(\frac{|x|}{|x_*|} \Big)^n. \tag{6}$$

A questo punto basta osservare che, per ipotesi (che non avevamo ancora sfruttato!), la serie (7) *converge* e quindi il suo termine generale *tende a zero*. Avremo quindi

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n x_*^n| = |\lim_{n\to+\infty} a_n x_*^n| = |0| = 0. \tag{7}$$

Esisterà quindi un n_0 tale che

$$|a_n x_*^n| < 1 \qquad \forall n \geq n_0. \tag{8}$$

Usando la (8) nella (6) avremo quindi che la (5) vale per tutti gli $n \geq n_0$, e il teorema è dimostrato.

CALCOLO DEL RAGGIO DI CONVERGENZA

Data una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{9}$$

cerchiamo di determinare il suo raggio di convergenza. A tal fine consideriamo il limite (se esiste)

$$\rho := \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n|}}{|a_{n+1}|}. \tag{10}$$

Supponiamo che il limite (10) esista (eventualmente $= +\infty$), e che sia > 0. Allora per ogni $x \in I\!R$ con $|x| < \rho$ si avrà:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{\rho} < 1 \tag{11}$$

e quindi, per il criterio del rapporto asintotico, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ converge, e quindi la serie (9) converge assolutamente.

In modo analogo, se il limite ρ in (10) esiste finito (eventualmente $= 0$), allora per ogni $x_* \in I\!R$ con $|x_*| > \rho$ possiamo trovare un $y \in I\!R$ con $\rho < |y| < |x_*|$. Per tale y si avrà

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}y^{n+1}|}{|a_n y^n|} = |y| \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|y|}{\rho} > 1 \tag{12}$$

che ci dice che la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n y^n|$ non converge. Ma grazie al teorema 1, se la serie di potenze convergesse (anche semplicemente) in x_*, allora convergerebbe assolutamente in y, visto che $|y| < |x_*|$. Ma sappiamo già, dalla (12), che la serie di potenze non converge assolutamente in y. Ne deduciamo che la serie di potenze (9) non converge (neanche semplicemente) in x_*.

Concludiamo che **se il limite ρ in (10) esiste, esso coincide con il raggio di convergenza R della serie di potenze**.