POLINOMI DI TAYLOR

Sia $n \in \mathbb{N}$, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile n volte, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Cerchiamo un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che:

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n'(x_0) = f'(x_0), ..., P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \tag{1}$$

Si ha il seguente risultato, di facile dimostrazione.
Teorema. Nelle ipotesi precedenti, esiste uno e un solo polinomio P_n, di grado $\leq n$, che verifica tutte le (1). Tale polinomio è dato dalla formula

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \tag{2}$$

e viene detto **polinomio di Taylor di ordine** n **relativo alla funzione** f **e al punto** x_0.

Nel caso particolare in cui $x_0 = 0$, il polinomio assume l'espressione

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \tag{3}$$

e viene detto **polinomio di Mc Laurin di ordine** n **relativo alla funzione** f.

Nota (per le mucche): bisogna distinguere il grado del polinomio dal suo ordine. Infatti l' **ordine** coincide, in termini colloquiali, col numero di derivate che vengono *copiate* nella (1). Al contrario, il **grado**, se scriviamo il polinomio come $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, è dato, come al solito, dall'indice massimo k per cui si ha $a_k \neq 0$. In particolare, ad esempio, il polinomio $P(x) = x$ *copia* la funzione $\sin(x)$, insieme alle sue derivate, fino all'ordine 2: infatti si ha

$$P(0) = \sin(0) = 0, \quad P'(0) = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1, \quad P''(0) = (\sin)''(0) = -\sin(0) = 0, \tag{4}$$

e quindi l' ordine è $= 2$ mentre (anche le mucche, sia pure scontente, ne convengono) il grado del polinomio $P(x) = x$ è ovviamente $= 1$.

SERIE DI TAYLOR

Supponiamo ora di avere una $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile infinite volte. Con una certa audacia, possiamo chiederci cosa succede se prendiamo, in un certo senso, $n = \infty$, sostituendo il polinomio di Taylor con la seguente *serie di potenze*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \tag{5}$$

che chiamiamo serie di Taylor relativa alla funzione f e al punto x_0.

Per semplicità, visto che abbiamo studiato solo le serie di potenze di centro 0 (cioè con $x_0 = 0$) possiamo anche qui limitarci al caso delle serie di Mac Laurin, date ovviamente da

$$McL(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0). \tag{6}$$

È facile riconoscere, prendendo $f(x) = \sin(x)$, oppure $f(x) = \cos(x)$, oppure $f(x) = \exp(x)$, oppure $f(x) = \ln(1 + x)$, eccetera, gli *sviluppi in serie* che abbiamo già visto (e utilizzato) numerose volte.

La (6) è palesemente una serie di potenze che corrisponde alla successione $a_k = f^{(k)}(0))/k!$. Ricordando il risultato sul raggio di convergenza delle serie di potenze abbiamo che, se il limite

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|f^{(k)}(0))/k!|}{|f^{(k+1)}(0))/(k + 1)!|} \tag{7}$$

esiste (finito, o eventualmente, $= +\infty$), allora tale limite coinciderà con il raggio di convergenza della serie (6).

Proviamo a calcolare il raggio di convergenza nel caso della serie di Mac Laurin di e^x e nel caso della serie di Mac Laurin di $1/(1-x)$. Nel caso di e^x abbiamo immediatamente che $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni k. Il limite (7) diviene allora facilmente

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|f^{(k)}(0)/k!|}{|f^{(k+1)}(0))/(k + 1)!|} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k + 1)!}{k!} = \lim_{k \to +\infty} k + 1 = +\infty \tag{8}$$

e la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Nel caso della funzione $1/(1-x)$ si ha invece (ancora facilmente, ma meno di prima) $f^{(k)}(0) = k!$ per ogni k. Il limite (7) diviene allora banalmente

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|f^{(k)}(0))/k!|}{|f^{(k+1)}(0))/(k + 1)!|} = \lim_{k \to +\infty} 1 = 1 \tag{9}$$

e il raggio di convergenza è uguale a 1. Cosa che sapevamo già benissimo (è *la* serie geometrica $1 + x + x^2 + ...$, e anzi sappiamo già che converge per tutti gli $|x| < 1$).

Esercizi.

- Dare delle condizioni sufficienti sulla successione $f^k(0)$ affinchè il raggio di convergenza della relativa serie di Mac Laurin sia positivo.
- Trovare un esempio di funzione f tale la sua serie di Mac Laurin converga per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma $f(x)$ sia *diverso* dalla somma $McL(x)$ (vedi (6)) per ogni x diverso da 0.