

UN AIUTO PER LE DISEQUAZIONI

In un certo numero di esercizi sulle serie (e in particolare per quegli esercizi che richiedono di individuare l'insieme di convergenza), bisogna risolvere delle disequazioni che coinvolgono i *valori assoluti*, noti per la loro perfidia, e generalmente **difficili da elaborare** per l'apparato digestivo dei ruminanti. Supponiamo che la disequazione sia del tipo

$$\left| \frac{ax+b}{cx+d} \right| < 1 \quad (1)$$

con a, b, c e d numeri reali qualsiasi (che spesso, nelle prove d'esame, saranno numeri interi).

Vediamo come fare un disegno che aiuti a verificare se la disequazione è stata risolta correttamente o muccosamente. Qui nel seguito vi dico come fare un disegno *dettagliato*, che in realtà potrebbe sostituire i calcoli della disequazione, dando subito, graficamente, la soluzione. Ma anche un disegno approssimativo può dare ottime indicazioni per capire se avete sbagliato i conti.

Usando il fatto che *il valore assoluto di un quoziente è uguale al quoziente dei valori assoluti* (muggiti di sorpresa!), e poi moltiplicando entrambi i membri per $|cx+d|$, la (1) diventa subito

$$\left| \frac{ax+b}{cx+d} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|ax+b|}{|cx+d|} < 1 \Leftrightarrow |ax+b| < |cx+d|. \quad (2)$$

Se disegniamo ciascuna delle due funzioni

$$y = |ax+b| \text{ e } y = |cx+d| \quad (3)$$

possiamo poi facilmente vedere quali sono i valori di x in corrispondenza dei quali *la prima sta sotto alla seconda* (e saranno i **valori di x da tenere**) e quali sono i valori di x in corrispondenza dei quali *la prima sta sopra alla seconda* (e saranno i valori di x da *scartare*).

Il primo problema, allora, è il seguente: dati a e b (numeri reali qualsiasi), disegnare la funzione $y = |ax+b|$. La procedura è illustrata nella figura 1. Dovreste essere capaci, ma, giusto per essere sicuri, e per aiutare le mucche, ecco come potete fare. Prendete della carta a quadretti (mi raccomando: i produttori di carta a quadretti mi foraggiano con cospicue bustarelle, e devo fare la dovuta pubblicità...). Decidete l'unità di misura: diciamo che un quadretto sia lungo 1. Per buona prudenza, prendete la stessa scala sui due assi (non sarebbe sbagliato prendere scale diverse, ma aumenterebbe il rischio di errori). Poi disegnate **la retta** di equazione $y = ax+b$: ad esempio prendendo il punto P di coordinate $(0, b)$ sull'asse delle y , il punto Q di coordinate $(-a/b, 0)$ sull'asse delle x , e tracciando la retta passante per i due punti P e Q ; naturalmente, qualunque coppia di punti P e Q appartenenti alla retta e con *coordinate comode* andrebbe ugualmente bene. Adesso prendete la parte di retta dove y risulta negativa (la parte rossa nella figura 1) e ribaltatela attorno all'asse delle x . Otterrete **una spezzata** (in **blu** nella figura 1) che rappresenta proprio il grafico cercato (cioè il grafico della funzione $y = |ax+b|$). Adesso, sullo stesso disegno, e con la stessa scala, fate la stessa cosa per ottenere il grafico della funzione $y = |cx+d|$. Alla fine avrete **due spezzate** come in figura 2 (una, **blu**, per $y = |ax+b|$ e una, **verde**, per $y = |cx+d|$). Adesso guardate per quali valori di x si ha che la spezzata **blu** sta **sotto** la spezzata **verde**: questi (in **marrone** nella figura 2) sono **gli x che soddisfano la disequazione (1)**.

Fate questa operazione per ciascuno degli esercizi di questo tipo (05, 10, 11, 12). Per gli esercizi 09 e 13 sostituite dapprima il segno " \leq " con il segno " $<$ ". Il problema diventa ancora del tipo della (1). Poi andate a vedere in quale dei due estremi *le due rette* (cioè la $y = ax+b$ e la $y = cx+d$: *senza* i valori assoluti, mucche!) hanno segni opposti (sarà uno dei due punti dove le spezzate si incontrano). Il valore di x corrispondente è quello da tenere. Guardate la figura 3.