**Tre serie fondamentali**

Discuteremo ora brevemente, ma con tante figure, il comportamento di tre serie particolari. Capire il comportamento di ciascuna delle tre serie dovrebbe aiutare molto la comprensione dei vari possibili comportamenti di *tutte le altre serie*.

Le tre serie fondamentali sono le seguenti.

La serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \tag{1}$$

che possiamo prendere come prototipo delle *serie divergenti*

La serie armonica a segni alterni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... \tag{2}$$

che possiamo prendere come prototipo delle *serie semplicemente convergenti*, cioè di quelle serie che convergono mentre la serie dei loro valori assoluti diverge. Notate che la (1) è proprio la serie dei valori assoluti della (2)

La serie dei reciproci dei quadrati:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... \tag{3}$$

che possiamo prendere come prototipo delle *serie convergenti*

Nelle pagine seguenti esamineremo separatamente il comportamento di ciascuna di esse.

## La serie armonica

Per studiare il comportamento della serie armonica (1) conviene utilizzare la seguente *serie di confronto*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log(\frac{n+1}{n}) = \log(2) + \log(\frac{3}{2}) + \log(\frac{4}{3}) + \log(\frac{5}{4}) + ... \tag{4}$$

le cui ridotte sono particolarmente *facili* da calcolare. Infatti, per ogni $k \geq 1$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{k} \log(\frac{n+1}{n}) = \log(2)+[\log(3)-\log(2)]+[\log(4)-\log(3)]+...+[\log(k+1)-\log(k)] = \log(k+1) \tag{5}$$

(mucche! ricordatevi che $\log(a\,b) = \log(a) + \log(b)$ e che $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ !!!).

Facendo il $\lim_{k\to+\infty}$ delle ridotte (5) della serie di confronto (4) si ottiene facilmente

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \log(\frac{n+1}{n}) = \lim_{k\to+\infty} \log(k+1) = +\infty \tag{6}$$

da cui deduciamo che la serie di confronto (4) risulta essere *divergente*. D'altra parte, notiamo che $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Quindi, utilizzando con $x = \frac{1}{n}$ la formula

$$\log(1 + x) \leq x \qquad \forall x > -1, \tag{7}$$

messa in evidenza nella Figura 1.0

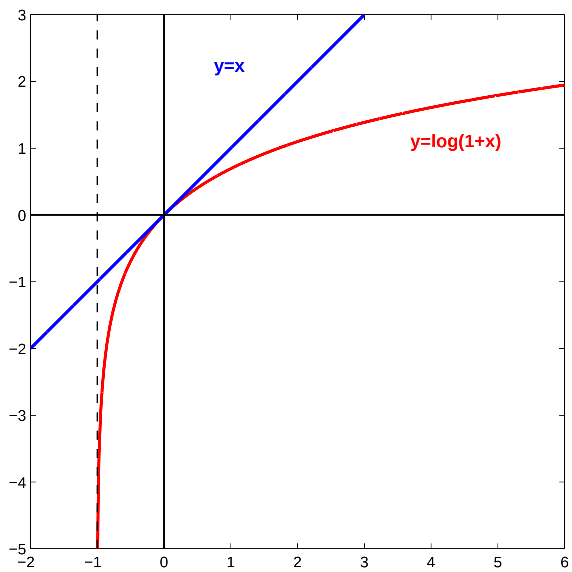


Figura 1.0

si vede ogni addendo della (4) risulta minore o uguale del corrispondente addento della (1). Avendo verificato che la (4) *diverge* ne consegue che anche la (1) (che ha gli addendi più grossi) deve *divergere anch'essa*. Muggiti di approvazione. Vuoi vedere che hanno capito davvero?

Per la serie armonica vengono rappresentate

- le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 100$ nella Figura 1.1:

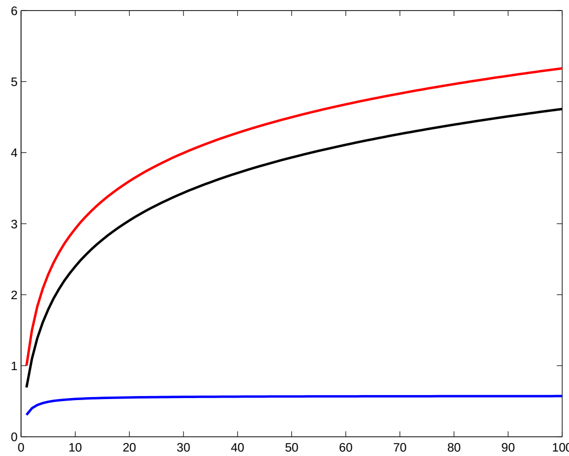


Figura 1.1

- le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 1.000$ nella Figura 1.2:

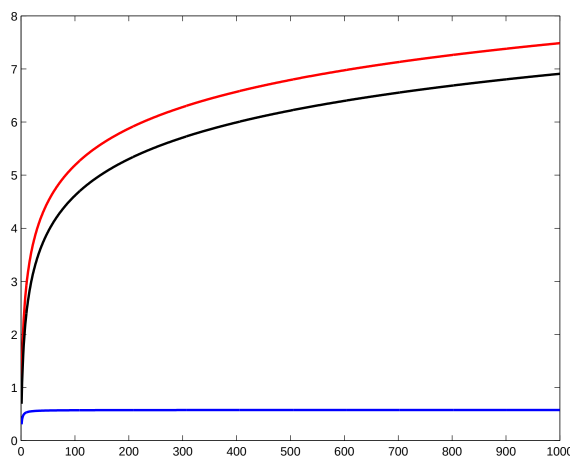


Figura 1.2

- le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 10.000$ nella Figura 1.3:

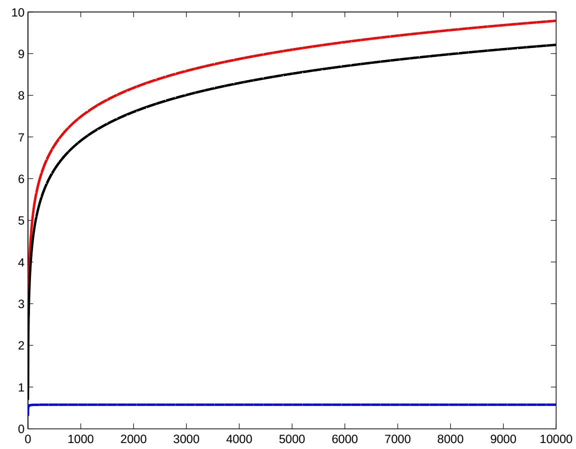


Figura 1.3

In ciascuna delle tre figure la curva rossa rappresenta le ridotte della serie (1) mentre la **curva nera** rappresenta le ridotte della *serie di confronto* (4)

Inoltre, sempre in ognuna delle figure 1.1, 1.2 e 1.3, in blu è rappresentata la *differenza* tra le ridotte della (1) e quelle della (4) (cioè, la rossa meno la nera). Si vede sperimentalmente (e si potrebbe anche dimostrare) che tale differenza tende a un limite finito per $k \to +\infty$. Tale costante (che vale circa 0.5772156649...) ha anche *un nome* (*costante di Eulero-Mascheroni*), ed è un numero molto misterioso, con un sacco di belle proprietà.

Infine, nella Figura 1.4 vengono rappresentate **le ridotte della serie di confronto (4)** per $k$ da 1 a 100.000. Si vede che vanno a $+\infty$, ma *molto lentamente*

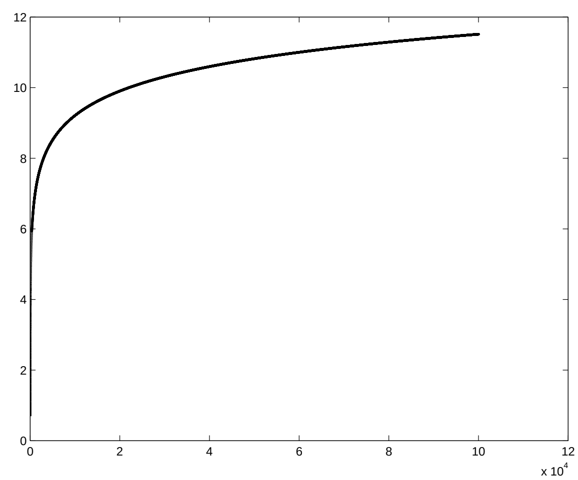


Figura 1.4

## La serie armonica a segni alterni

La *serie armonica a segni alterni* è *convergente*, ma per dimostrarlo si richiede un certo lavoro (a meno che non si conosca il Teorema di Leibniz). Vediamo come si potrebbe procedere. Poniamo, per $k = 1, 2, ...$

$$s(k) = \sum_{1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{8}$$

Le mucche sono già in crisi. Vediamo i primi valori di $k$:

$$\begin{aligned}
&s(1) = 1\\
&s(2) = 1 - \frac{1}{2}\\
&s(3) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\\
&s(4) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\\
&s(5) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\\
&s(6) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\\
&.........
\end{aligned}$$

osserviamo che le somme $s(2j)$ di indice pari costituiscono una successione *strettamente crescente*. Infatti, ad esempio,

$$s(4) - s(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} > 0. \tag{9}$$

Invece le somme $s(2j + 1)$ di indice dispari costituiscono una successione *strettamente decrescente*. Infatti, ad esempio,

$$s(5) - s(3) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 0. \tag{10}$$

Ne discende in particolare che le somme $s(2j)$ sono limitate superiormente. Infatti, ad esempio, avremo $s(6) = s(5) - 1/6$, quindi $s(6) < s(5)$: ma siccome la $s(2j + 1)$ *decresce* avremo anche $s(5) < s(1)$. Quindi $s(6) < s(1)$ (e lo stesso argomento si applica a ogni numero pari al posto di 6). Analogamente le $s(2j+1)$ sono limitate inferiormente: infatti, ad esempio, $s(7) = s(6)+1/7 > s(6) > s(2)$ (dove, mucche, l'ultima disuguaglianza si basa sul fatto che le somme di indice pari *crescono*).

Quindi per $j \to +\infty$ entrambe le successioni $s(2j)$ e $s(2j + 1)$ hanno limite finito. Chiamiamo $S_p$ e $S_d$ i rispettivi limiti. Ora osserviamo che per ogni $j$ si ha

$$s(2j + 1) = s(2j) + \frac{1}{2j + 1}. \tag{11}$$

Passando al limite nella (11) per $j \to +\infty$ otteniamo $S_d = S_p + 0$ cioè $S_d = S_p$. Con poca ulteriore fatica (ma anche intuitivamente) deduciamo che *tutta* la successione $s(k)$ (pari e dispari insieme) converge al valore comune $S_d = S_p$. Quindi, per la definizione di *serie convergente*, abbiamo che la (2) è una serie convergente. Le mucche sembrano piuttosto stralunate: meglio far loro vedere qualche figura...

Abbiamo quindi, (in rosso), le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 10$ nella Figura 2.1:

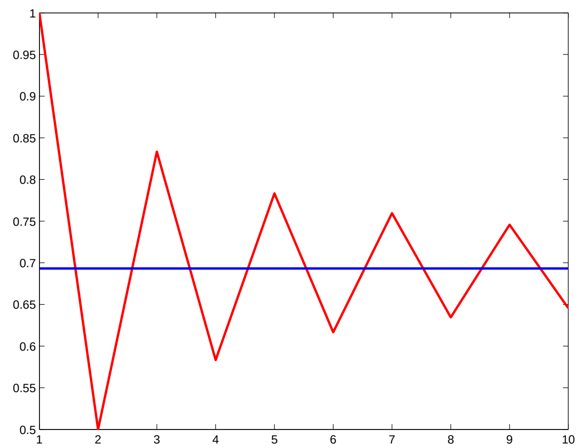


Figura 2.1

da cui si vede molto bene la crescenza delle somme di indice pari e la decrescenza delle somme di indice dispari (nonché il fatto che qualunque somma parziale di indice pari è minore di qualunque somma parziale di indice dispari).

Per vedere meglio il comportamento per $k$ grande, vediamo le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 100$ nella Figura 2.2:

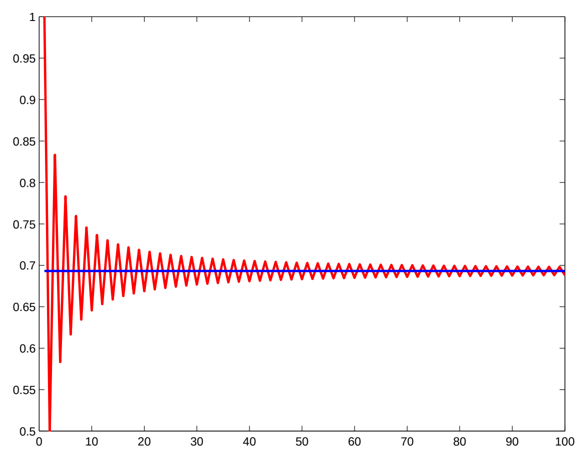


Figura 2.2

le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 1.000$ nella Figura 2.3:

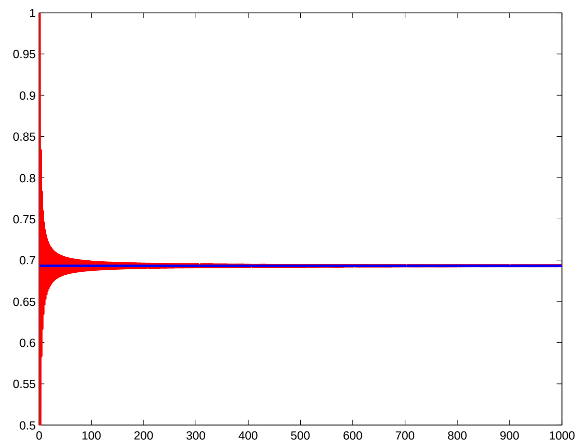


Figura 2.3

e le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 10.000$ nella Figura 2.4:

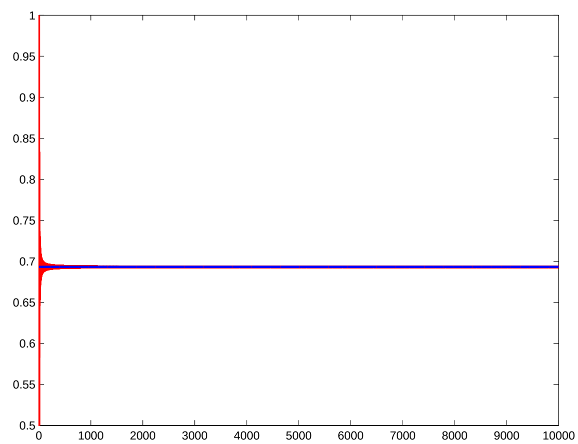


Figura 2.4

Inoltre, per ciascuna figura, è anche rappresentata (in blu) la retta $y = \log(2)$, che rappresenta *la somma della serie* (a cui convergono infatti, per $k \to +\infty$, le ridotte $s(k)$ della serie; ma la dimostrazione di quest'ultima affermazione non è facile).

### La serie dei reciproci dei quadrati

La serie dei reciproci dei quadrati (3) è anch'essa convergente. La sua convergenza si dimostra facilmente usando come *serie di confronto* la seguente serie

$$1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+... \tag{12}$$

le cui ridotte sono particolarmente *facili* da calcolare. Infatti, per ogni $k\geq 2$ abbiamo

$$1+\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n(n-1)}=1+[1-\frac{1}{2}]+[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}]+[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}]+...+[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}]=2-\frac{1}{k} \tag{13}$$

(mucche! ricordatevi che $\frac{1}{n\cdot(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$). In particolare si ha che le ridotte della (12) crescono al crescere di $k$ e tendono a 2, che quindi è *la somma della serie di confronto* (12).

Le ridotte della (3) costituiscono ovviamente una successione *strettamente crescente*, in quanto ogni volta aggiungo un addendo positivo in più. D'altra parte ogni addendo della (3) risulta strettamente minore (tranne il primo addendo, che è uguale) del corrispondente addendo della (12). Le mucche mi guardano perplesse: faccio loro notare che

$$1=1,\quad \frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3},\quad \frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot 4},.....$$

Sembrano convinte. Bene! Quindi le ridotte della (3) sono sempre minori delle ridotte corrispondenti della (12), che a loro volta crescono sempre, e, come abbiamo visto, tendono a 2. Ne deduciamo che le ridotte della (3) sono sempre minori di 2. Quindi la successione delle ridotte della (3) risulta strettamente crescente e superiormente limitata (da 2), e quindi ha limite finito. Quindi, per la definizione di *serie convergente*, abbiamo che la serie (3) è convergente.

Adesso vediamo qualche figura. Abbiamo (in rosso)

- le ridotte $s(k)$ per $k=1,..,10$ nella Figura 3.1:

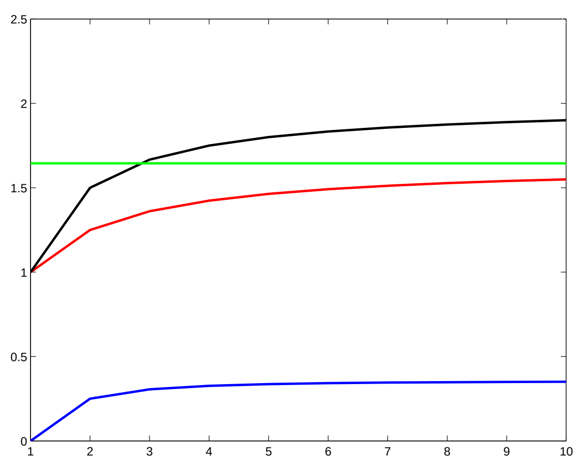


Figura 3.1

- le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 100$ nella Figura 3.2

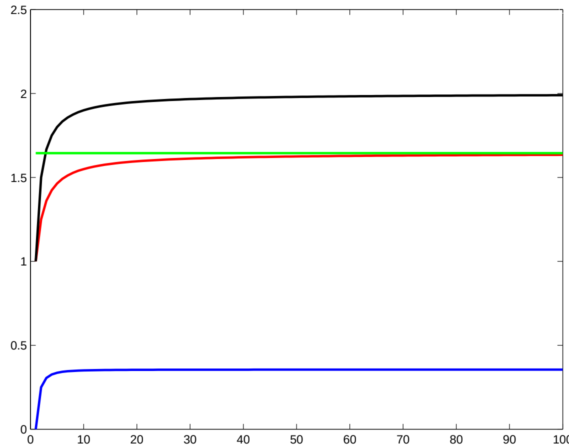


Figura 3.2

- le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 1.000$ nella Figura 3.3:

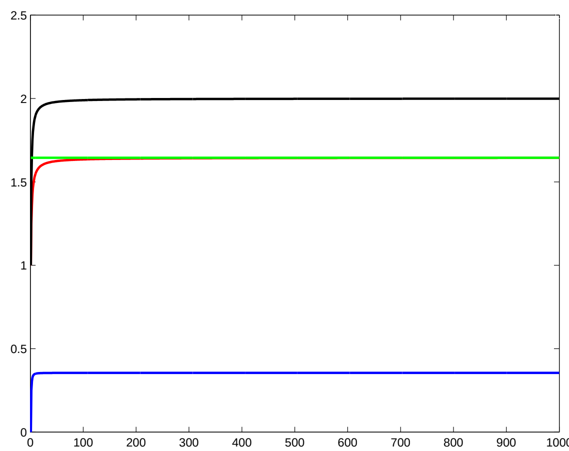


Figura 3.3

- le ridotte $s(k)$ per $k = 1, .., 10.000$ nella Figura 3.4:

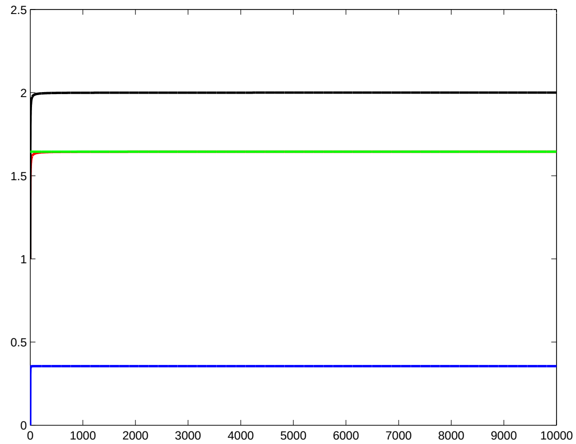


Figura 3.4

Inoltre, per ciascuna figura, sono anche rappresentate, **in nero**, le ridotte della **serie di confronto** (12), (che infatti tendono a 2) e, in blu, abbiamo la differenza delle due (la (12) meno la (3), ovvero la nera meno la rossa), che tende ad una costante, (che stavolta *non ha ancora un nome*: qualcuno vuole unirsi a me, e battezzarla *costante di Brezzi-Mucca*? Magari passiamo alla storia!).

Per finire, in verde, abbiamo la retta $y = \dfrac{\pi^2}{6}$, che rappresenta *la somma della serie* (3) *dei reciproci dei quadrati* (e a cui convergono infatti, per $k \to +\infty$, le ridotte $s(k)$ della serie stessa : la dimostrazione non è elementare, ma l'ha già fatta Eulero). Quindi la *costante di Brezzi-Mucca* vale esattamente $2 - \pi^2/6$. Non credo che passeremo alla storia!