Risoluzione degli esercizi del Primo Appello (31/1/07)

1 Sia $y = g(x)$ l'equazione della retta tangente alla curva C di equazione $y = e^x + 3\,x^2 - 6\,x + 3$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, e)$ di C. Allora $12\,(\ln(g(3)) - \ln(3) + 3) + 3$ vale...

Svolgimento. La derivata in 1 vale $e + 6 - 6 = e$. L'equazione della retta tangente sarà quindi

$$y = f(1) + (x-1)f'(1) = e + (x-1)\,e = x\,e$$

e $\ln(g(3) = \ln(3\,e) = \ln(3) + \ln(e) = \ln(3) + 1$. Quindi $(\ln(g(3)) - \ln(3) + 3) = 1 + 3 = 4$ e $12\,(\ln(g(3)) - \ln(3) + 3) + 3 = 12\,(4) + 3 = 51$.

2 Sia $f(x) := x^5 + x^3 + x - 3\,, \forall x \in \mathbf{R}$. Sia g la funzione inversa di f.
Allora $18g'(0) + 8$ vale ....

Svolgimento: $y = f(x)$ vale 0 quando x verifica $f(x) = x^5 + x^3 + x - 3 = 0$, cioè quando $x = 1$. Allora

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{9}.$$

Infine $18g'(0) + 8 = 10$

3 Sia $f(x) := \arcsin(5x) + \arctan(2\,x) + \dfrac{7\,x^4}{\sin x - x}$ per ogni $x \neq 0$ e $f(0) := 0$. Allora $f'(0)$ vale...

Svolgimento L'esercizio si può fare in vari modi. Il modo più rapido è quello di notare che (essendo $f(0) = 0$),

$$f'(0) := \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

ma si può evidentemente procedere in modo più tradizionale, calcolando le derivate nel generico x e poi prendendo $x = 0$. Banalmente la derivata di $\arctan x$ e di $\arcsin x$, in 0, sono entrambe uguali a 1, Quindi la derivata in 0 di $\arcsin(5x) + \arctan(2\,x)$ vale 7. Per il termine rimanente, osserviamo che $\sin x - x \simeq -x^3/6$ da cui $\frac{7\,x^4}{\sin x - x} \simeq -42x$ e la sua derivata in 0 fa -42. Finalmente si ha $f'(0) = 7 - 42 = 35$.

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} 7\left(8\,e^{-7/x} + \frac{\sin(7\,x)}{x} + \frac{e^{8x} - 1}{7\,x}\right)$ =...

Svolgimento Conviene analizzare i tre limiti separatamente; si ha immediatamente:

$$\lim_{x\to 0+} 8\,e^{-7/x} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(7\,x)}{x} = 7$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{8x} - 1}{7\,x} = \frac{8}{7}$$

$$\lim_{x\to 0+} 7\left(8\,e^{-7/x} + \frac{\sin(7\,x)}{x} + \frac{e^{8x} - 1}{7\,x}\right) = 7(0+7+8/7) = 0+49+8 = 57.$$

5 Sia $f(x) := x^3 - 75\,x + 1$ e sia x_m l'unico punto di minimo relativo della funzione f su $\mathbf{R}$. Allora $f''(x_m) + 1$ vale...

Svolgimento Per trovare gli estremi relativi, vediamo dove si annulla la derivata di f . Abbiamo $f'(x) = 3\,x^2 - 75$, da cui $f(x) = 0$ per $x^2 = 25$, cioè per $x = 5$ e $x = -5$. Tra questi è facile vedere che per $x = -5$ abbiamo un *massimo relativo* e per $x = 5$ abbiamo un *minimo relativo*. Dato che $f''(x) = 6x$ abbiamo allora $f''(5) + 1 = 30 + 1 = 31$.

6 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) := 3\cos(|x|) - 6\arctan(x^2)\,, \forall x \in \mathbf{R}$.
Quali delle seguenti proprietà ha la funzione f **in tutto** $\mathbf{R}$?
A) f è continua; B) f è derivabile; C) f è limitata inferiormente; D) f è dispari;
E) f è limitata superiormente; F) f è pari; G) f è monotona; H) f è periodica.

Svolgimento: la prima osservazione dovrebbe essere che $\cos(|x|) = \cos x$ (visto che il coseno è pari). Consideriamo quindi $3\cos x - 6\arctan(x^2)$, che risulta evidentemente continua, derivabile e pari. Altrettanto evidentemente la funzione è limitata (sia inferiormente che superiormente), **non** è monotòna (le uniche funzioni monotòne e pari sono le costanti), **non** è periodica (l'arcotangente non assume mai due volte lo stesso valore) e tanto meno è dispari (?!?) (anche se, con mio grande sconforto, qualcuno l'ha detto). Quindi: A, B, C, E, F.

7 Sia $I := 7\displaystyle\int_{-1/7}^{1/7} \{\left(1 - 49x^2\right)^{-1/2} + 7\pi\}\mathrm{d}x$. Allora $\dfrac{I}{\pi}$ vale....

Svolgimento Anche qui, guardiamo i due addendi separatamente:

$$\int_{-1/7}^{1/7} \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}\mathrm{d}x = \Big[\arcsin(7x)\Big]_{-1/7}^{1/7} = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - (\frac{-\pi}{2}) = \pi$$

$$7\int_{-1/7}^{1/7} 7\pi\mathrm{d}x = 7 \cdot \frac{2}{7} \cdot 7\pi = 14\pi$$

Infine si ha $I = \pi + 14\pi = 15\pi$ e $I/\pi = 15$.

8 Sia $J := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{7}{\pi(1+x^2)} + e^{-x/7}\,\mathrm{d}x$. Allora $2J + 12$ vale....

Svolgimento: sempre studiando i due pezzi separatamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{7}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{\pi}\Big[\arctan x\Big]_0^{+\infty} = \frac{7}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x/7}\,\mathrm{d}x = \Big[-7e^{-x/7}\Big]_0^{+\infty} = 7$$

9 Considerata la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n})^{24-2x}}$, dire per quali valori di x essa **converge semplicemente**.

Svolgimento Ricordiamo che le serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta}$ convergono se e solo se $\beta > 0$ mentre le serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ convergono se e solo se $\alpha > 1$. Ricordiamo anche che una serie converge semplicemente se converge, ma la serie dei suoi valori assoluti non converge. In particolare la serie in questione converge per $(1/2)(24-2x) > 0$ (cioè per $x < 12$) mentre la serie dei suoi valori assoluti (cioè la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{24-2x}}$) converge per $(1/2)(24-2x) > 1$ (cioè per $x < 11$). Quindi i valori di x per cui la serie data converge ($x < 12$) ma la serie dei valori assoluti **non** converge ($x \geq 11$) sono quelli per cui $11 \leq x < 12$.

10 Sia $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 7^{-n}$ Allora $18\,S + 7$ vale...

Svolgimento Calcoliamo prima la somma $\bar{S} := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 7^{-n}$ (notate l'indice di somma che parte da zero) per poi avere $S = \bar{S} - 1$. Usando la formula che dà la somma della serie geometrica, abbiamo

$$\bar{S} := \sum_{n=0}^{+\infty} 7^{-n} = \frac{1}{1-(1/7)} = \frac{7}{6}$$

Quindi

$$S = \bar{S} - 1 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

e conseguentemente $18\,S + 7 = 3 + 7 = 10$.

11 Sia $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy : $y''(t) + 49y(t) = -49\,, \forall t \in \mathbf{R}$; $y(0) = 0\,, y'(0) = 0$. Allora $y''(\pi) + 12$ vale...

Svolgimento: L'integrale generale della equazione ommogenea ($y''(t) + 49y(t) = 0$) è $y_{om} = C_1 \cos(7x) + C_2 \sin(7x)$ mentre una soluzione particolare si trova facilmente con $y_p = -1$. Imponendo all'integrale generale della equazione completa

$$y(x) = y_{om} + y_p = C_1 \cos(7x) + C_2 \sin(7x) - 1$$

di soddisfare le condizioni iniziali $y(0) = 0\,, y'(0) = 0$ si ricava facilmente $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$, quindi $y(x) = \cos(7x) - 1$. Ne consegue che $y''(x) = -49\cos(7x)$ e quindi $y''(\pi) = 49$ e $y''(\pi) + 12$ vale 61 .

12 Sia $u : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy : $u'(x) + \dfrac{1}{x}\,u(x) = 12\,, \forall x > 0$; $u(1) = 7$. Allora $4\,u'(2)$ vale....

Cominciamo con l'integrale generale della omogenea associata: $u_{om} = Ce^{-\log x}$ che riscriviamo come $u_{om} = \dfrac{C}{x}$. Come integrale particolare, provando con monomi, troviamo facilmente $y_p(x) = 6x$ (che si sarebbe potuta trovare anche con la formula generale, oppure con la formula di variazione della costante arbitraria). In ogni caso, l'integrale generale della equazione completa risulta

$$u = \frac{C}{x} + 6x$$

e imponendo la condizione iniziale ($u(1) = 7$) si ricava $C = 1$. Quindi $u(x) = \dfrac{1}{x} + 6x$, e $u'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + 6$. Infine $4\,u'(2) = 4(\dfrac{-1}{4} + 6) = 23$.