Risoluzione degli esercizi del Secondo Appello (19/2/07)

1 Sia $y = g(x)$ l'equazione della retta tangente alla curva C di equazione $y = 8\,x^4 - 7\,x^3 + 2$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, 3)$ di C. Allora $g(-1)$ vale....

Svolgimento. La derivata di $8\,x^4 - 7\,x^3 + 2$ per $x = 1$ vale $4 \cdot 8 - 3 \cdot 7 = 11$ Quindi l'equazione della retta sarà $y = g(x) = f(1) + (x-1)f'(1) = 3 + 11(x-1) = 11x - 8$. Quindi $g(-1) = -19$

2 Sia per $x \geq 0$ $f(x) := x^5 + x^2 + x + 7$. Sia g la funzione inversa di f.
Allora $9\,g'(7) + 7$ vale....

Svolgimento. Si ha $y\,(= f(x)) = 7$ quando $x^5 + x^2 + x + 7 = 7$, che per $x \geq 0$ ha la sola soluzione $x = 0$. Quindi

$$g'(7) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Infine $9g'(0) + 7 = 16$

3 Sia $f(x) := \sin(3x) + \arctan(4\,x) + \dfrac{7\,x^3}{\mathrm{e}^x - 1 - x}$ per ogni $x \neq 0$ e $f(0) := 0$. Allora $f'(0)$ vale....

Svolgimento. L'esercizio, (**praticamente uguale a un esercizio dato nella prova del 31 Gennaio**, la cui soluzione era stata messa in rete), si può fare in vari modi. Il modo più rapido è quello di notare che (essendo $f(0) = 0$),

$$f'(0) := \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x},$$

ma si può evidentemente procedere in modo più tradizionale, calcolando le derivate nel generico x e poi prendendo $x = 0$. Banalmente le derivate di $\sin 3x$ e di $\arctan 4x$, in 0, sono uguali, rispettivamente, a 3 e a 4. Quindi la derivata in 0 di $\sin(3x) + \arctan(4\,x)$ vale 7. Per il termine rimanente, osserviamo che $\mathrm{e}^x - 1 - x \simeq x^2/2$ da cui $\frac{7\,x^3}{\mathrm{e}^x - 1 - x} \simeq 14x$ e la sua derivata in 0 fa 14. Finalmente si ha $f'(0) = 7 + 14 = 21$.

4. $\displaystyle\lim_{x \to 0}\; 11\,(\mathrm{e}^{-7/|x|} + \mathrm{e}^{|x|}) + \frac{\arctan(7\,x)}{x} + 2\frac{\cos(7\,x) - 1}{x^2} \quad =...$

Svolgimento. Preso atto che

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-7/|x|} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{|x|} = 1,$$

$$\arctan(7\,x) \simeq 7x,$$

$$\cos(7\,x) - 1 \simeq \frac{-(7x)^2}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\ 11\,(\mathrm{e}^{-7/|x|}+\mathrm{e}^{|x|})+\frac{\arctan{(7\,x)}}{x}+2\frac{\cos 7x-1}{x^2}\ =11\,(0+1)+7+2\frac{-(7x)^2}{2}=11+7-49=-31$$

5 Sia $f(x) := |x|\mathrm{e}^{-x}+7$ e sia x_m l'unico punto di minimo relativo della funzione f su $\mathbf{R}$. Allora $f(x_m)+27$ vale....

Svolgimento. Sembrerebbe facile vedere che $f(x)\geq 7\,\forall x$ e che $f(0)=7$, e quindi per $x=0$ si ha un punto di minimo assoluto. Fidandosi del testo (che parla di *unico punto di minimo relativo*) si deduce che $x_m=0$ da cui $f(x_m)+27=34$. Ma *facciamo finta di non esserci accorti* e calcoliamo la derivata di $f(x)$ per $x\neq 0$ (visto che per $x=0$ la funzione non è derivabile). Abbiamo, per $x<0$, che $f(x)=-x\mathrm{e}^{-x}+7$ da cui $f'(x)=(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$ che, per $x<0$, non si annulla mai (è sempre negativa). Per $x>0$ abbiamo invece $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}+7$ da cui $f'(x)=(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$ che è *positiva* per $0<x<1$, è *negativa* per $1<x$ e si annulla per $x=1$ che risulta quindi un *massimo relativo*. Del resto, $f''(1)=-\mathrm{e}^{-1}<0$ (bocca che piange), come si conviene ad un onesto *massimo relativo*. Quindi il *minimo relativo* deve per forza essere in 0 ...

6 Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definita da $f(x):=x^7\,\mathrm{e}^{-|x|}-8,\ \forall x\in\mathbf{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha la funzione f **in tutto** $\mathbf{R}$?
A) f è continua; B) f è derivabile; C) f è limitata inferiormente; D) f è dispari;
E) f è limitata superiormente; F) f è pari; G) f è monotona; H) f è periodica.
(**N.B.** La risposta a questa domanda sarà considerata esatta, se e solo se saranno indicate **tutte e sole** le proprietà che ha effettivamente la funzione f , fra quelle riportate qui sopra.)

Svolgimento. Questo esercizio aveva due varianti: una è quella scritta sopra (con $\mathrm{e}^{-|x|}$ moltiplicato per una potenza *dispari* di x (qui, x^7)). La variante consisteva nell'uso di una potenza *pari* di x : ad esempio $f(x):=x^6\,\mathrm{e}^{-|x|}-8$.

Cominciamo con

$$f(x):=x^7\,\mathrm{e}^{-|x|}-8,$$

che risulta immediatamente continua e derivabile in tutto $\mathbf{R}$. Si vede anche facilmente che i limiti per x che tende a $+\infty$ e per x che tende a $-\infty$ sono entrambi $=-8$. Deduciamo quindi che la funzione deve essere limitata (sia inferiormente che superiormente). Si vede anche facilmente che f non è pari e neppure dispari. Pensare che sia periodica è da ricovero (fortunatamente non l'ha detto nessuno) e una funzione monotona che "parte" da -8 (a $-\infty$) e "arriva" a -8 (a $+\infty$) è *molto difficile* da immaginare, a meno che la funzione non sia costante (che non era il nostro caso; ma, sfortunatamente, la monotonia ha comunque ottenuto parecchi consensi). Quindi la risposta giusta era A,B,C,E .

Nel caso invece della funzione

$$f(x):=x^6\,\mathrm{e}^{-|x|}-8,$$

abbiamo le stesse proprietà di prima (per gli stessi motivi), ma inoltre la funzione risulta anche essere *pari*. Quindi la risposta giusta era A,B,C,E,F .

Svolgimento. Calcoliamo separatamente

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x = 7\,[\arcsin x]_{-1}^{1} = 7(\pi/2-(-\pi/2)) = 7\pi;$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{18\,x^2}{1+x^2}-18\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{18\,x^2-18-18\,x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{-18}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

e poi

$$\int_{-1}^{1}\frac{-18}{1+x^2}\mathrm{d}x = -18\,[\arctan x]_{-1}^{1} = -18(\pi/4-(-\pi/4)) = -9\pi;$$

da cui segue facilmente che $I = 7\pi - 9\pi = -2\pi$ e $\dfrac{I}{\pi} = -2$.

8 Sia $J := \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(7x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x/4}\right)\mathrm{d}x$. Allora $J+4$ vale...

Svolgimento. Calcoliamo separatamente

$$\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[x\cdot(-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = 0 - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1,$$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x/4}\,\mathrm{d}x = \left[-4\mathrm{e}^{-x/4}\right]_0^{+\infty} = 4,$$

da cui

$$J := \int_0^{+\infty}\left(7x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x/4}\right)\mathrm{d}x = 7+4 = 11,$$

e $J+4 = 15$.

9 Considerata la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)^{7-x/2}}$, dire per quali valori di x essa **converge assolutamente**. (N.B. *Attenti a distinguere* $<$ *da* $\leq$ *(e* $>$ *da* $\geq$ *))*

Svolgimento. Ricordiamo che una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ (dei suoi valori assoluti) converge.
Nel nostro caso, quindi, bisogna vedere per quali x converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+n^2)^{7-x/2}}.$$

Ricordiamo ora che una serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$. Quindi dobbiamo imporre $2(7-x/2) > 1$, cioè $14-x>1$ cioè $x<13$.

a distinguere $<$ *da* $\leq$ *(e* $>$ *da* $\geq$ *))*

Svolgimento. Ricordiamo che una serie del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} k^n$ (cioè una serie *geometrica*) converge *se e solo se* $|k| < 1$. Quindi, nel nostro caso, dopo avere scritto la nostra serie come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+7)^{n+1}}{6^{n-1}} = 6(x+7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+7)^n}{6^n} = 6(x+7) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x+7}{6}\right)^n$$

dobbiamo imporre che

$$\left|\frac{x+7}{6}\right| < 1,$$

cioè che $|x+7| < 6$, cioè che *la distanza di* x *da* -7 *sia minore di* 6 . Questo avviene quando $-7-6 < x < -7+6$ cioè quando $-13 < x < -1$

11 Sia $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy : $y''(t) + 23y'(t) = -23$, $\forall t \in \mathbf{R}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -24$. Allora $23\,y(1) + y'(1) + 12$ vale....

Svolgimento. Consideriamo dapprima l'equazione *omogenea associata*, cioè $y''(t)+23y'(t) = 0$, il cui integrale generale è dato da

$$y_{om} = C_1 \mathrm{e}^{-23\,t} + C_2.$$

Poi cerchiamo una soluzione particolare y_p della equazione completa. Verrebbe voglia di provare con $y_p = A$ (cercando A in modo che y_p risolva l'equazione). Questo tentativo è però destinato a fallire, in quanto le costanti (come C_2 o come la A che vorremmo cercare) risolvono, come abbiamo visto, l'equazione omogenea associata ($y''+23y' = 0$) e quindi, certamente, **non possono** risolvere l'equazione completa ($y''+23y' = -23$). Quindi bisogna *alzare il grado* e provare con $y_p = At$. Si ha facilmente $y_p' = A$ e $y_p'' = 0$, che sostituiti nella equazione danno $0+23A = -23$ e quindi $A = -1$ e $y_p = -t$. L'integrale generale della equazione completa è quindi dato da

$$y = y_{om} + y_p = C_1 \mathrm{e}^{-23\,t} + C_2 - t,$$

a cui dobbiamo ora imporre le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = -24$ per trovare C_1 e C_2 . Abbiamo

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

e

$$y'(0) = -23\,C_1 - 1 = -24,$$

da cui facilmente $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$. La soluzione è quindi data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{-23\,t} - t.$$

Per *buona prudenza* controlliamo che $y''(t) + 23y'(t)$ faccia davvero -23 , che $y(0)$ faccia 1 e che $y'(0)$ faccia -24 . La verifica è lasciata al lettore...
A questo punto calcoliamo $y(1) = \mathrm{e}^{-23} - 1$ e $y'(1) = -23\mathrm{e}^{-23} - 1$. Quindi $23\,y(1) + y'(1) + 12$ vale $23(\mathrm{e}^{-23} - 1) + (-23\mathrm{e}^{-23} - 1) + 12 = -23 - 1 + 12 = -12$.

$u(\frac{8}{7}) = 1$. Allora $16 \log_2 u(\frac{16}{7}) + 8$ vale....

Svolgimento. Anche questo esercizio è praticamente una *versione leggermente semplificata* di un esercizio **quasi identico** dato nella prova del 31 gennaio 2007, la cui soluzione era stata messa in rete.
Si tratta di una equazione *a variabili separabili* che risolviamo col *trucco di Leibniz* : da

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-u^{-1/7}}{x^2}$$

otteniamo (senza saper bene cosa vuol dire) che

$$u^{1/7}\,\mathrm{d}u = \frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

da cui, “integrando”,

$$\left[\frac{7}{8}v^{8/7}\right]_1^u = \left[\frac{1}{t}\right]_{8/7}^x .$$

Svolgendo i calcoli si ha

$$\frac{7}{8}u^{8/7} - \frac{7}{8} = \frac{1}{x} - \frac{1}{8/7}$$

da cui

$$\frac{7}{8}u^{8/7} = \frac{1}{x}$$

e finalmente

$$u(x) = \left(\frac{8}{7x}\right)^{7/8} .$$

Ora calcoliamo

$$u(\frac{16}{7}) = \left(\frac{8}{7 \cdot \frac{16}{7}}\right)^{7/8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{7/8} = 2^{-7/8}$$

da cui $16 \log_2 u(\frac{16}{7}) + 8 = 16 \cdot \left(\frac{-7}{8}\right) + 8 = -14 + 8 = -6$.