Risoluzione degli esercizi della seconda prova in itinere (31/1/07)

1. Dire per quali valori di x **converge** la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n^2)^{11-x/2}}$

Svolgimento: le serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ convergono se e solo se $\alpha>1$. Quindi imponiamo

$$2(11-x/2)>1.$$

Abbiamo $22-x>1$ e quindi $x<21$.

2. Sia D l'insieme degli $x\in\mathbf{R}$ per i quali **diverge** la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n+2}}{|x+2|^n}$, e sia $|D|$ la sua lunghezza. Allora $|D|+7$ vale...

Svolgimento: le serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}k^n$ convergono se e solo se $|k|<1$. Quindi scriviamo prima la nostra serie come $\displaystyle 9\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{|x+2|^n}$ e poi (per imporre la **divergenza**) richiediamo $|\frac{3}{|x+2|}|\geq 1$, cioè $|x-2|\leq 3$, cioè $-1\leq x\leq 5$. Quindi $|D|=6$ e $|D|+7=13$.

3. Posto $I:=\int_{-1}^{1}(x^4+x^4\sinh x)\mathrm{d}x$ allora $5I+7$ vale ...

Svolgimento: La funzione $x^4\sinh x$ è dispari, e quindi il suo integrale su $(-1,1)$ vale zero. Quindi

$$I:=\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=2/5.$$

quindi $5\,I+7$ vale 9.

4. Sia $I:=\int_0^{\sqrt{\pi}}9x\sin(x^2)\mathrm{d}x$ allora $7I$ vale...

Svolgimento: La derivata di $-\cos(x^2)$ fa $2x\sin(x^2)$ quindi una primitiva di $9\,x\sin(x^2)$ è $\dfrac{-9}{2}\cos(x^2)$. Quindi

$$I:=\int_0^{\sqrt{\pi}}9x\sin(x^2)\mathrm{d}x=\left[\frac{-9}{2}\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}}=\frac{-9}{2}[\cos(\pi)-\cos(0)]=\frac{-9}{2}\cdot[-2]=9.$$

Infine $7\,I$ vale 63

5. Posto $f(x):=\dfrac{5|x|^4}{x}\max\{1,x\}$ per $x\neq 0$ e $f(0):=0$, sia $I:=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. Allora $3\lg_2(I+1)$ vale...

Svolgimento: ovviamente per $x\leq 1$ si ha $f(x)=\dfrac{5|x|^4}{x}$, che è *dispari*. Quindi

$$I:=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

$$I := \int_{1} f(x)\mathrm{d} = \int_{1} 5\,x^4 \mathrm{d}x = \Big[x^5\Big]_1 = 2^5 - 1.$$

Conseguentemente $I + 1 = 2^5$ e $3\,\mathrm{lg}_2(I+1) = 3\,\mathrm{lg}_2(2^5) = 3 \cdot 5 = 15.$

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema ai valori iniziali $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2$; $y(0) = y'(0) = 24$ Allora $y''(0)$ vale...
Svolgimento: l' equazione omogenea associata è $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$ e il suo integrale generale è dato da $y_{om} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Una soluzione particolare è ovviamente data da $y_p(x) = 1\ \forall\, x$. Quindi l'integrale generale della nostra equazione è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = y'(0) = 24$ si ottiene

$$C_1 + C_2 + 1 = 24 \quad \text{e} \quad C_1 + 2\,C_2 = 24$$

da cui si deduce facilmente $C_1 = 22$ e $C_2 = 1$. Quindi la nostra soluzione è data da $y(x) = 22e^x + e^{2x} + 1$, e $y''(0) = 22\,e^0 + 4\,e^{2\cdot 0} = 22 + 4 = 26.$

7. Sia $y(x)$ la soluzione del problema ai valori iniziali $y'(x) + \dfrac{5}{x} y(x) = 0$; $y(1) = 4$. Allora $y'(1)$ vale...
Svolgimento: l'integrale generale della equazione è dato da $y = C\,e^{-5\log x}$, che per non essere magicamente trasformati in una mucca dobbiamo **subito** scrivere $y = C\,e^{-5\log x} = C\,e^{\log(x^{-5})} = \dfrac{C}{x^5}$. Imponendo $y(1) = 4$ troviamo $C = 4$, da cui $y = \dfrac{4}{x^5}$ e $y' = \dfrac{-20}{x^6}$ e $y'(1) = -20$.

8. Sia $y(x)$ la soluzione del problema ai valori iniziali $y'(x) = y^{13/14}(x)$; $y(0) = 1$.
Allora $17 + \log_2 y(14)$ vale...
Svolgimento: procedendo "alla Leibniz" scriviamo $dy/dx = y^{13/14}$ e poi (suinamente)

$$y^{-13/14} dy = dx;$$

integrando : $\dfrac{y^{1-13/14}}{1 - 13/14} = x + C$. Osservando che $1 - 13/14 = 1/14$ si ha $y^{1/14} = \dfrac{x + C}{14}$ ed imponendo $y(0) = 1$ si ottiene $C = 14$, cioè $y(x) = \left(\dfrac{x+14}{14}\right)^{14}$. Per $x = 14$ abbiamo $y(14) = \left(\dfrac{28}{14}\right)^{14} = 2^{14}$. Ne consegue che $\log_2 y(14) = \log_2 (2^{14}) = 14$ e finalmente $17 + \log_2 y(14) = 17 + 14 = 31$.