

1 Sia $y = g(x)$ l'equazione della retta tangente alla curva C di equazione

$$y = 8 \lg(1 + x^2) + 3x^2 + 7x + 5$$

nel punto $(x_0, y_0) = (0, 5)$ di C . Allora $g(1)$ vale...

Svolgimento. La derivata in 0 vale 7. L'equazione della retta tangente sarà allora

$$y = f(0) + (x - 0)f'(0) = 5 + 7x.$$

Quindi $g(1)$ vale 12. Un pigraccio avrebbe potuto notare che la *prima parte* della funzione (cioè $8 \lg(1 + x^2) + 3x^2$) si comporta, vicino a 0 come $11x^2$, ed è quindi piuttosto ovvio che la tangente in $(0, 5)$ alla curva sia data dal *pezzo di funzione rimanente*, cioè $7x + 5$.

L'esercizio è stato svolto correttamente da 26 studenti su 37. In pratica, più di un quarto degli studenti che si sono presentati **non** è riuscito a farlo.

2 Sia, per $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ definita da $f(x) := \frac{x}{22} + \sinh \frac{x}{22} + 4$ e sia g la sua funzione inversa. Allora $g'(4) + 4$ vale

Svolgimento. $y = f(x)$ vale 4 quando x verifica $f(x) := \frac{x}{22} + \sinh \frac{x}{22} + 4 = 4$, cioè quando $x = 0$. Allora

$$g'(4) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{(1/22) + (1/22)} = \frac{1}{1/11} = 11.$$

Infine $g'(4) + 4 = 11 + 4 = 15$.

L'esercizio è stato svolto correttamente da 25 studenti su 37 (quindi 12 su 37, quasi un terzo, l'hanno sbagliato o non l'hanno fatto)

3 Sia $f(x) := e^{x^2-x+4} + e^{-x^2+x+4} - 7x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Allora $f'(1) + 4$ vale ...

Svolgimento. Si ha

$$f'(x) = e^{x^2-x+4}(2x - 1) + e^{-x^2+x+4}(-2x + 1) - 7.$$

Per $x = 1$ si ha quindi $f'(1) = e^4 \cdot (1) + e^4 \cdot (-1) - 7 = -7$. Quindi $f'(1) + 4 = -3$.

L'esercizio è stato svolto correttamente da 31 studenti su 37.

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} e^{-5/|x|} + 12e^{5|x|} + \frac{5 - 5 \cos 2x^4}{2x^8} = \dots$$

Svolgimento. Conviene analizzare i tre limiti separatamente. Si ha immediatamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-5/|x|} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{5|x|} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - 5 \cos 2x^4}{2x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \frac{[(2x^4)^2]/2}{2x^8} = 5 \frac{[4x^8]}{2(2x^8)} = 5.$$

Conseguentemente: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-5/|x|} + 12e^{5|x|} + \frac{5 - 5 \cos 2x^4}{2x^8} = 0 + 12 \cdot 1 + 5 = 17.$

L'esercizio è stato svolto correttamente da 15 studenti su 37. Immagino che un certo numero di mucche abbiano applicato 8 volte il teorema di De l'Hôpital, e abbiano miseramente sbagliato i conti. Perché non riesco a impietosirmi?

5 Sia $f(x) := x^4 - 50x^2 + 1$ e sia x_M l'unico punto di massimo relativo della funzione f su $\mathbf{R}$. Allora $1 - f''(x_M)$ vale...

Svolgimento. Per trovare gli estremi relativi, vediamo dove si annulla la derivata di f . Abbiamo $f'(x) = 4x^3 - 100x = 4x(x^2 - 25)$, da cui $f'(x) = 0$ per $x = 0$ oppure per $x^2 = 25$ (quindi per $x \in \{-5, 0, 5\}$). Osservando che $f''(x) = 12x^2 - 100$ si ha che $f''(0) = -100 < 0$ mentre $f''(-5) = f''(5) = 200 > 0$. Quindi il massimo relativo è in $x = 0$. Abbiamo allora $1 - f''(0) = 1 + 100 = 101$.

L'esercizio è stato svolto correttamente da 18 studenti su 37. Neanche la metà. Allucinante! Cosa si poteva sbagliare? Sembra, ricostruendo gli errori dal tipo di risultati sbagliati, che la difficoltà fosse osservare che $-f''(x_M) = -(-100) = +100$. Che scritti bisogna dare per farvi passare?

6 Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) := e^{-|7x|} + |\sin 7x| + 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Quali delle seguenti proprietà ha la funzione f in tutto $\mathbf{R}$?

- A) f è continua; B) f è derivabile; C) f è limitata inferiormente; D) f è dispari;
E) f è limitata superiormente; F) f è pari; G) f è monotona; H) f è periodica.

Svolgimento. Si verifica immediatamente che f è continua, limitata (sia inferiormente che superiormente: infatti $0 < e^{-|7x|} \leq 1$ e $0 \leq |\sin 7x| \leq 1$), e pari. Si verifica anche immediatamente che f non è monotona (le funzioni monotone e pari sono costanti...) e non è periodica. Resta il dubbio sulla derivabilità: è ovvio che la funzione è derivabile in ogni x diverso da zero, ma sarà derivabile in zero? Con buona pace di quelli che non hanno studiato abbastanza, vicino a zero la funzione si comporta come

$$\{1 - |7x| + (|7x|^2)/2 - \dots\} + \{|7x - (7x)^3/6 + \dots|\} + 2 \sim 3 + h.o.t.$$

dove gli *h.o.t.* (higher order terms) sono delle potenze di x di grado ≥ 2 (quindi derivabili in zero). In conclusione, anche la B è vera. Quindi: A, B, C, E, F.

L'esercizio è stato svolto correttamente da 6 studenti su 37. Questo purtroppo me lo aspettavo. Avete sempre avuto difficoltà con questi esercizi.

7 L'integrale $\int_{12}^{13} 38 + 2x dx$ vale...

Svolgimento. Bisogna solo stare attenti ai conti:

$$\int_{12}^{13} 38 dx = (13 - 12) \cdot 38 = 38;$$

$$\int_{12}^{13} 2x dx = \left[x^2 \right]_{12}^{13} = 13^2 - 12^2 = (13 - 12) \cdot (13 + 12) = 25.$$

$$\int_a^b f(x)dx \sim (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

fornisce l'integrale esatto. Nel nostro caso

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (13-12)f\left(\frac{25}{2}\right) = 1 \cdot \left(38 + 2 \frac{25}{2}\right) = 38 + 25 = 63.$$

L'esercizio è stato svolto correttamente da 25 studenti su 37. Insomma: un terzo degli studenti che vengono a sostenere l'esame non sa integrare un polinomio di primo grado.

8 Sia $J := \int_{-1}^1 \frac{6}{\pi}(1-x^2)^{-1/2} + \frac{\pi}{6}(x-x^3)^{-1/3}dx$. Allora $J + 10$ vale....

Svolgimento. Sempre studiando i due pezzi separatamente

$$\int_{-1}^1 \frac{6}{\pi}(1-x^2)^{-1/2} dx = \frac{6}{\pi} \left[\arcsin x \right]_{-1}^1 = \frac{6}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right] = 6;$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\pi}{6}(x-x^3)^{-1/3} dx = 0,$$

poiché l'intervallo è pari e l'integrando è dispari. Quindi $J = 6 + 10 = 16$.

L'esercizio è stato svolto correttamente da 22 studenti su 37. Come dire che 15 su 37 l'hanno sbollettato. Come avranno fatto a superare la Maturità Scientifica?

9 Sia $I := \{x \in \mathbf{R} \text{ t. c. } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{15x-3x^2}} \text{ converga} \}$. Allora la lunghezza di I vale...

Svolgimento. Ricordiamo che le serie del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta}$ convergono se e solo se $\beta > 0$. Quindi la nostra serie converge quando

$$15x - 3x^2 > 0 \Rightarrow 5x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 5$$

e la lunghezza di I vale 5. L'esercizio è stato svolto correttamente da 19 studenti su 37. Praticamente la metà.

Con mia grandissima sorpresa, la locuzione "lunghezza di I " ha messo in difficoltà un certo numero di studenti, malgrado io avessi ripetuto esplicitamente, prima che la prova scritta avesse inizio, che *tutti gli esercizi, tranne quello sulle proprietà della funzione, hanno come risultato un numero intero, che va rigorosamente scritto "come numero intero" (cioè **non** come il risultato di altre operazioni, come (verbatim): $14/2$, $6 + \cos 0$, $7 + \sin 0$, o anche $7 + 0$ che saranno, **tutte**, considerate come "risposte errate")*. Perché 5 persone mi hanno risposto come $0 < x < 5$? Forse avevano il dubbio che, trattandosi di un intervallo aperto, la sua lunghezza fosse *un po' meno di 5*. Come dire " $5 - \varepsilon$ ", che però non è un numero intero...

Questo esercizio, e i tre successivi, erano tutti **molto facili**, ma in generale gli argomenti relativi non erano stati visti alla scuola media superiore. Ho l'impressione che molti studenti tentino di passare, con un po' di fortuna, utilizzando il bagaglio di conoscenze acquisite alla scuola media superiore. Ma non sempre la fortuna aiuta.

Svolgimento. Calcoliamo prima la somma $\bar{S} := \sum_{n=0}^{+\infty} 7^{-n}$ (notate l'indice di somma che parte da zero) per poi avere $S = \bar{S} - 1 - \frac{1}{7}$. Usando la formula che dà la somma della serie geometrica, abbiamo

$$\bar{S} := \sum_{n=0}^{+\infty} 7^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = \frac{1}{1 - (1/7)} = \frac{7}{6}.$$

Quindi

$$S = \bar{S} - 1 - \frac{1}{7} = \frac{7}{6} - \frac{8}{7} = \frac{49 - 48}{42} = \frac{1}{42}$$

e conseguentemente $6(7S + 4) = 42S + 24 = 1 + 24 = 25$.

L'esercizio è stato svolto correttamente da 13 studenti su 37. Cosa diavolo c'era di difficile?

11 Sia $u :]-2, 2[\rightarrow \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy : $\frac{4}{\pi}u'(x) - u^2(x) - 1 = 0$ $\forall x \in]-2, 2[$; $u(0) = 0$. Allora $17u(1) + 7u(-1)$ vale...

Svolgimento. L'equazione è *a variabili separabili*. Riscriviamola come

$$u'(x) = \frac{\pi}{4} (1 + u^2(x))$$

ovvero

$$\frac{du}{dx} = \frac{\pi}{4} (1 + u^2).$$

Con il solito *abuso di notazione* (=porcellata) abbiamo

$$\int_0^u \frac{du}{1 + u^2} = \int_0^x \frac{\pi}{4} dx$$

da cui

$$\arctan u = \frac{\pi x}{4}$$

e finalmente, esplicitando la u ,

$$u(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

Ne consegue che $u(1) = 1$ e $u(-1) = -1$. Infine $17u(1) + 7u(-1) = 17 - 7 = 10$.

L'esercizio è stato svolto correttamente da 11 studenti su 37. Non c'è come *non studiare*...

12 Sia $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy : $y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 32$, $\forall t \in \mathbf{R}$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 8$. Allora $y'(2)e^{-8} + 2$ vale....

Svolgimento. Cominciamo con l'integrale generale della omogenea associata. L'equazione caratteristica

$$\rho^2 - 8\rho + 16 = 0$$

ha due radici coincidenti $\rho_{1,2} = 4$. Quindi l'integrale generale si scrive

$$y_{om}(t) = C_1 e^{4t} + C_2 t e^{4t}.$$

$$y = y_{om} + y_p = C_1 e^{4t} + C_2 t e^{4t} + 2.$$

Imponendo la prima condizione iniziale ($y(0) = 2$) si ricava immediatamente $C_1 = 0$. Poi imponendo la seconda condizione iniziale ($y'(0) = 8$) si ricava $C_2 = 8$. Quindi

$$y(t) = 8 t e^{4t} + 2 \quad \text{da cui} \quad y'(t) = 8 e^{4t} + 32 t e^{4t}.$$

Ne consegue che $y'(2) = 72 e^8$ e $y'(2)e^{-8} + 2 = 72 + 2 = 74$.

L'esercizio è stato svolto correttamente da 12 studenti su 37. Vedi sopra.