Risoluzione degli esercizi del Quarto Appello (17/9/07)

1 Sia $f(x)=\sqrt{5-3\,x^2}$ e sia $y=g(x)$ l'equazione della retta tangente alla curva C nel punto $(x_0,y_0)\equiv(1,\sqrt{2})$ di C. Allora $f(1)g(3)$ vale...

Svolgimento. Abbiamo $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{5-3\,x^2}}\cdot(-6x)$. Quindi $f'(1)=\dfrac{-3}{\sqrt{2}}$. Inoltre, dalla formula generale $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, applicata con $x_0=1$, $f(x_0)=\sqrt{2}$ e $f'(x_0)=-3/\sqrt{2}$ otteniamo $g(3)=\sqrt{2}+\dfrac{-3}{\sqrt{2}}\cdot(3-1)=-2\sqrt{2}$. Quindi

$$f(1)g(3)=\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})=-4.$$

Hanno risposto correttamente da 5 studenti su 21.

2 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|+e^{-x^2}+15\,x\,\arctan(-x)-19\pi\,x}{x\arctan x}=\ldots$

Svolgimento. Cominciamo col trascurare $\ln|x|$ e e^{-x^2} (che sono, appunto, trascurabili rispetto, ad esempio, a $-19\pi\,x$ che tende a $+\infty$. Restiamo con

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{15\,x\,\arctan(-x)-19\pi\,x}{x\arctan x}$$

Separatamente, abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{15\,x\,\arctan(-x)}{x\arctan x}=\lim_{x\to-\infty}-15=-15$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-19\pi\,x}{x\arctan x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-19\pi}{\arctan x}=\frac{-19\pi}{-\pi/2}=2\cdot19=38.$$

Il risultato era quindi $-15+38=23$ Hanno risposto correttamente da 6 studenti su 21.

3 Sia $f(x):=\cos(8\,x)\,\arctan(3\,x)+e^{3\,x}\sin(8\,x)$ per ogni $x\in\mathbf{R}$. Allora $f'(0)+8$ vale...

Svolgimento. Si ha

$$f'(x)=-8\,\sin(8\,x)\arctan(3\,x)+\cos(8\,x)\cdot\frac{3}{1+(3\,x)^2}+3\,e^{3\,x}\sin(8\,x)+8\,e^{3\,x}\cos(8\,x)$$

Quindi $f'(0)+8=(0+3+0+8)+8=19$ Hanno risposto correttamente da 14 studenti su 21.

4 $\lim_{x\to 0}\ 18\dfrac{x-\sin x}{x-x\,\cos x}+18\,e^{-18/|x|}+30\dfrac{\sqrt{9+7\,x}-3}{x} \quad = ...$

Svolgimento. Conviene analizzare i tre limiti separatamente. Si ha immediatamente:

$$\lim_{x\to 0}\ 18\frac{x-\sin x}{x-x\,\cos x}=\lim_{x\to 0}\ 18\frac{x-[x-x^3/6+..]}{x(1-[1-x^2/2+..])}=\lim_{x\to 0}\ 18\frac{x^3/6}{x^3/2}=6;$$

$$\lim_{x\to 0} 18\,e^{-18/|x|}=0;$$

$$\lim_{x\to 0} 30\frac{\sqrt{9+7\,x}-3}{x}=\lim_{x\to 0} 30\frac{\frac{7}{2\sqrt{9+7\,x}}}{1}=30\cdot\frac{7}{2\cdot\sqrt{9}}=35$$

Quindi il limite vale $6+35=41$. Ha risposto correttamente **uno** studente su 21.

5 Sia $f(x):=2\,x^3-18\,x^2+48\,x$ e siano x_M e x_m , rispettivamente, i punti di massimo relativo e di minimo relativo della funzione f su $\mathbf{R}$. Allora $3\,x_m-2x_M$ vale

Svolgimento. Per trovare gli estremi relativi, vediamo dove si annulla la derivata di f . Abbiamo $f'(x)=6\,x^2-36\,x+48=6\,(x^2-6\,x+8)$, da cui $f(x)=0$ per $x=2$ oppure per $x=4$. È facile vedere che per $x=2$ la funzione ha un massimo locale (quindi $x_M=2$) e per $x=4$ la funzione ha invece un minimo locale (quindi $x_m=4$). Quindi $3x_m-2x_M=3\cdot 4-2\cdot 2=8$. Hanno risposto correttamente 10 studenti su 21.

6 Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definita da $f(x):=|x|x^6+6x^{16}$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha la funzione f **in tutto** $\mathbf{R}$? A) f è continua; B) f è derivabile; C) f è limitata inferiormente; D) f è dispari; E) f è limitata superiormente; F) f è pari; G) f è monotona.
N.B. La risposta a questa domanda viene considerata esatta **se e solo se** sono state indicate **tutte e sole** le proprietà, fra quelle riportate qui sopra, che la funzione f possiede.

Svolgimento. Si ha facilmente che f è continua, derivabile, pari, e limitata inferiormente (infatti $f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbf{R})$. Quindi la risposta giusta era A,B,C,F . Si noti che altri compiti richiedevano le proprietà di funzioni del tipo $|x|x^5+5x^15$; in tali casi si avevano funzioni continue, derivabili, dispari, e monotone. Quindi A,B,D,G . Hanno risposto correttamente 11 studenti su 21.

7 L'integrale $\int_2^9[(7+x)^{-1/2}+1]\,\mathrm{d}x$ vale...

Svolgimento.

$$\int_2^9(7+x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\Big[2\sqrt{7+x}\Big]_2^9=2\big[\sqrt{16}-\sqrt{9}\big]=2;$$

$$\int_2^9 1\,\mathrm{d}x=7.$$

Quindi l'integrale vale $2+7=9$. Hanno svolto correttamente l'esercizio 5 studenti su 21.

8 Sia $J := \displaystyle\int_{-1}^{1} (|x|^8 + x^9 \sin(x^8) + 4)\mathrm{d}x$. Allora $9\,J$ vale...

Svolgimento. Si ha

$$\int_{-1}^{1} |x|^8 \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^8 \mathrm{d}x = \frac{2}{9},$$

$$\int_{-1}^{1} x^9 \sin(x^8)\mathrm{d}x = 0,$$

poiché l'intervallo è pari e l'integrando è dispari, e infine

$$\int_{-1}^{1} 4\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 4 = 8.$$

Quindi $9J = 9\,(\frac{2}{9} + 8) = 2 + 72 = 74$. Hanno svolto correttamente l'esercizio 5 studenti su 21.

9 Sia $S_1 := \{x \in \mathbf{R}$ t. c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-12)^n}{3^n}$ converga$\}$. Allora $\sup S_1$ vale...

Svolgimento. Ricordiamo che le serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} k^n$ convergono se e solo se $|k| < 1$. Quindi la nostra serie converge se e solo se

$$\Big|\frac{(x-12)^n}{3^n}\Big| < 1$$

cioè se $|x-12| < 3$ (cane legato in 12 e con guinzaglio lungo 3). Abbiamo quindi $S_1 =]9, 15[$ e $\sup S_1 = 15$. L'esercizio è stato svolto correttamente da 10 studenti su 21.

10 Sia $S_2 := \{x \in \mathbf{R}$ t. c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{8-|x-21|}}$ converga$\}$. Allora $3\sup S_2 - 2\inf S_2$ vale....

Svolgimento. Ricordiamo che le serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ convergono se e solo se $\alpha > 1$. Quindi la nostra serie converge se e solo se

$$8 - |x-21| > 1$$

cioè se $|x-21| < 7$ (cane legato in 21 e con guinzaglio lungo 7). Abbiamo quindi $S_1 =]14, 28[$. Conseguentemente $\sup S_2 = 28$ e $\inf S_2 = 14$. Infine $3\sup S_2 - 2\inf S_2 = 3 \cdot 28 - 2 \cdot 14 = 4 \cdot 14 = 56$. L'esercizio è stato svolto correttamente da 6 studenti su 21.

11 Sia $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy : $y''(t) - 6\,y'(t) + 9\,y(t) = 0\,, \forall\, t \in \mathbf{R}$; $y(0) = 0\,;\, y'(0) = e^2$. Allora $\ln(y'(1) - 3\,y(1))$ vale...

Cominciamo con l'integrale generale. L'equazione caratteristica

$$\rho^2 - 6\rho + 9 = 0$$

ha due radici coincidenti $\rho_{1,2} = 3$. Quindi l'integrale generale si scrive

$$y(t) = C_1\, e^{3\,t} + C_2\, t\, e^{3\,t}.$$

Imponendo la prima condizione iniziale ($y(0) = 0$) si ricava immediatamente $C_1 = 0$. Poi imponendo la seconda condizione iniziale ($y'(0) = e^2$) si ricava $C_2 = e^2$. Quindi $y(t) = e^2\, t\, e^{3\,t}$ e

$$y'(t) - 3\,y(t) = e^2(e^{3\,t} + 3\,t\, e^{3\,t}) - 3\,t\, e^{3\,t} = e^2 \cdot e^{3\,t} = e^{2+3\,t}.$$

Conseguentemente $y'(1) - 3\,y(1) = e^5$ e $\ln(y'(1) - 3\,y(1)) = 5$. Hanno svolto correttamente l'esercizio 9 studenti su 21.

12 Sia $u : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy : $x\,u'(x) = 9\,u(x)\ \ \forall x \in]1, +\infty[$; $u(1) = 2$. Allora $\dfrac{u''(1)}{9}$ vale...

Svolgimento. L'equazione è *lineare del primo ordine* e anche *a variabili separabili*. Trattandola come una lineare ($u' - \dfrac{9}{x}\, u(x) = 0$) abbiamo come integrale generale $u(x) = C\, e^{A(x)}$ dove $A(x)$ è una primitiva di $\dfrac{9}{x}$. Quindi

$$u(x) = C\, e^{9 \ln x} = C\, x^9.$$

Imponendo $u(1) = 2$ si ha allora $u(x) = 2\, x^9$.
Trattando l'equazione come una equazione a variabili separabili avremmo invece

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{9\,u}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{9\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \int_2^u \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^x \frac{9\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln u - \ln 2 = 9 \ln x \Rightarrow u = 2\, x^9$$

(cioè lo stesso risultato, con un altro procedimento). Ne consegue che $u''(x) = 2 \cdot 72\, x^7$ e

$$\frac{u''(1)}{9} = 2 \cdot 8 = 16.$$

Si noti che al risultato si poteva arrivare senza risolvere l'equazione differenziale, osservando che dalla

$$(1) \qquad x\,u'(x) - 9\,u(x) = 0 \ \ \forall x \in]1, +\infty[,$$

dervando, si ottiene

$$(2) \qquad x\,u''(x) + u'(x) - 9\,u'(x) = 0 \ \ \forall x \in]1, +\infty[,$$

mentre sostituendo $x = 1$ nella (1) e usando $u(1) = 2$ si ottiene $u'(1) = 18$. A questo punto, basta prendere $x = 1$ nella (2) (che fornisce $u''(1) = 8\,u'(1)$) e ricordandosi che $u'(1) = 18$ si ottiene $u''(1) = 8 \cdot 18$; etc. L'esercizio è stato svolto correttamente da 3 studenti su 21.