1 Sia $y = g(x)$ l'equazione della retta tangente alla curva C di equazione $y = 8\,x^4 - 7\,x^2 + 2$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, 3)$ di C . Allora $g(2)$ vale....

Svolgimento. Ponendo $f(x) := 8\,x^4 - 7\,x^2 + 2$, la derivata di $f(x)$ per $x = 1$ vale $4{\cdot}8 - 2{\cdot}7 = 18$ Quindi l'equazione della retta sarà $y = g(x) = f(1) + (x-1)f'(1) = 3 + 18(x-1)$. Quindi $g(2) = 3 + 18 = 21$

2 Sia $f(x) := x^5 + x^3 - 2\,,\,\forall x \in \mathbf{R}$. Sia g la funzione inversa di f .
Allora $8\,g'(0) + 4$ vale....

Svolgimento. Si ha $y\,(= f(x)) = 0$ quando $x^5 + x^3 - 2 = 0$, che ha la sola soluzione $x = 1$. Quindi

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{8}.$$

Infine $8g'(0) + 4 = 1 + 4 = 5$

3 Sia $f(x) := \arcsin(5\,x) + \arctan(3\,x) + 5\,x$ per ogni x . Allora $f'(0)$ vale....

Svolgimento. Visto che, per x vicino a 0 , $\arcsin 5x \sim 5x$ e $\arctan 3x \sim 3x$, si ha banalmente che $f'(0)$ vale $5 + 3 + 5 = 13$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\ 10\,\mathrm{e}^{-6/x} + \frac{\sinh(6\,x)}{x} + \frac{\cos(2\,x) - 1}{x^2}$ $=$...

Svolgimento. Preso atto del fatto che

$$\lim_{x\to 0+}\ \mathrm{e}^{-6/x} = 0,$$

$$\sinh(6\,x) \simeq 6x,$$

$$\cos(2\,x) - 1 \simeq \frac{-(2x)^2}{2},$$

otteniamo facilmente

$$\lim_{x\to 0+}\ 10\,\mathrm{e}^{-6/x} + \frac{\sinh(6\,x)}{x} + \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = 10\cdot 0 + 6 - \frac{2^2}{2} = 6 - 2 = 4.$$

5 Sia $f(x) := x^3 - 27x + 9$ e sia x_M l'unico punto di massimo relativo della funzione f su $\mathbf{R}$. Allora $9 + x_M$ vale....

Svolgimento. Abbiamo $f'(x) = 3\,x^2 - 27$ che si annulla per $x = \pm 3$. Guardando, ad esempio, $f''(-3) = -18 < 0$ e $f''(3) = 18 > 0$ si deduce che per $x = -3$ abbiamo un massimo relativo e per $x = 3$ abbiamo un minimo relativo. Quindi $x_M = -3$ e $9 + x_M = 9 + (-3) = 6$.

6 Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definita da $\mathrm{e}^{-|x|}-x^6$, $\forall x\in\mathbf{R}$.
Quali delle seguenti proprietà ha la funzione f **in tutto** $\mathbf{R}$?
A) f è continua; B) f è derivabile; C) f è limitata inferiormente; D) f è dispari;
E) f è limitata superiormente; F) f è pari; G) f è monotona; H) f è periodica.
(**N.B.** La risposta a questa domanda sarà considerata esatta, se e solo se saranno indicate **tutte e sole** le proprietà che ha effettivamente la funzione f , fra quelle riportate qui sopra.)

Svolgimento. Osserviamo che $\mathrm{e}^{-|x|}$ è pari, è continua, non è derivabile in 0 , ed è sempre compresa tra 0 e 1 . Invece $-x^6$ risulta pari, continua, derivabile, limitata superiormente (è sempre ≤ 0) ma non inferiormente. La somma delle due funzioni è continua, non è derivabile, non è limitata inferiormente, non è dispari, è limitata superiormente, è pari, e non è monotona (provate a cercare di disegnare una funzione monotona e pari, che non sia costante...). Quindi: A, E, F

7 Sia $I := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\{3\left(1-x^2\right)^{-1/2}+4\pi\}\mathrm{d}x$. Allora I vale....

Svolgimento. Guardiamo i due addendi separatamente:

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{-1/2}\mathrm{d}x=\Big[\arcsin x\Big]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$$

$$\int_{-1}^{1}4\pi\mathrm{d}x=8\pi$$

Infine si ha $I=\dfrac{1}{\pi}(3\pi+8\pi)=11$.

8 Sia $J:=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{6}{\pi(1+x^2)}+8\,x\,e^{-2\,x}\,\mathrm{d}x$. Allora $2J$ vale....

Svolgimento. Sempre studiando i due pezzi separatamente

$$\int_0^{+\infty}\frac{6}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{\pi}\Big[\arctan x\Big]_0^{+\infty}=\frac{6}{\pi}\frac{\pi}{2}=3;$$

$$8\int_0^{+\infty}x\,\{e^{-2\,x}\}\,\mathrm{d}x=8\int_0^{+\infty}x\,\{\frac{-1}{2}D(e^{-2\,x})\}\,\mathrm{d}x$$

$$=-4\int_0^{+\infty}x\,D(e^{-2\,x})\,\mathrm{d}x=4\int_0^{+\infty}e^{-2\,x}\,\mathrm{d}x=-2\Big[e^{-2\,x}\Big]_0^{+\infty}=2.$$

Quindi $2J=2\cdot(3+2)=10.$

9 Considerata la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3+n^2)^{5-x/2}}$, dire per quali valori di x essa **converge** (N.B. *Attenti a distinguere* $<$ *da* $\le$ *(e* $>$ *da* $\ge$ *))*

particolare la serie in questione converge se, e solo se, $2(5-x/2)>1$ cioè per $x<9$.

10 Sia $S:=\sum_{n=0}^{+\infty}3^{-n}$. Allora $6+\dfrac{3}{S}$ vale...

Svolgimento. S è una serie geometrica di ragione $\dfrac{1}{3}<1$. Quindi è convergente, e la sua somma vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty}3^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{3})^n=\frac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

Quindi $6+\dfrac{3}{S}=6+2=8.$

11 Sia $y:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy : $y''(t)+9y(t)=9\,,\ \forall t\in\mathbf{R}\,;$ $y(0)=1\,,\ y'(0)=3$. Allora $y'(\pi)+10$ vale...

Svolgimento. L'integrale generale della equazione omogenea ($y''(t)+9y(t)=0$) è $y_{om}=C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)$ mentre una soluzione particolare si trova facilmente con $y_p=1$. Imponendo all'integrale generale della equazione completa

$$y(t)=y_{om}+y_p=C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)+1$$

di soddisfare le condizioni iniziali $y(0)=1\,,\ y'(0)=3$ si ricava facilmente $C_1=0$ e $C_2=1$, quindi $y(t)=\sin(3t)+1$. Ne consegue che $y'(\pi)+10=3\cos(3\pi)+10=-3+10=7.$

12 Sia, per $x\geq 1$, $u(x)$ la soluzione del problema di Cauchy : $u'(x)+\dfrac{u^2(x)}{x}=0$ per ogni $x>1$, con $u(1)=\dfrac{1}{2}$. Allora $\dfrac{1}{u(\mathrm{e})}+14$ vale...

Svolgimento. Procedendo "alla Leibniz" abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

da cui, cambiando di segno al tutto e "integrando",

$$\frac{1}{u}=\ln x+c$$

e ricavando la u

$$u(x)=\frac{1}{\ln x+c}.$$

Imponendo la condizione iniziale $u(1)=\dfrac{1}{2}$ si ottiene $c=2$; quindi $u(x)=\dfrac{1}{\ln x+2}$ e

$$u(\mathrm{e})=\frac{1}{\ln\mathrm{e}+2}=\frac{1}{3}.$$

Finalmente $\dfrac{1}{u(\mathrm{e})}+14=3+14=17$.