Definizione di funzione limitata

Definizione Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che

- f è *limitata superiormente* se

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x) \leq M \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- f è *limitata inferiormente* se

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tale che } K \leq f(x) \leq K \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- f è *limitata* se è sia limitata superiormente che limitata inferiormente, cioè se

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ e } \exists M \in \mathbb{R} \text{ tali che } K \leq f(x) \leq M \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Faccio osservare che la definizione di *funzione limitata* può essere anche scritta come

$$\exists B \in \mathbb{R} \text{ tale che } |f(x)| \leq B \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

La cosa scatena un parapiglia indegno tra le mucche, che vengono severamente redarguite. Ristabilita la calma, chiedo loro di fornire qualche esempio di una funzione che verifichi la (1) ma non la (2). Oppure qualche esempio di una funzione che verifichi le (2) ma non la (1).

Infatti, dico loro, se ci convincessimo che *ogni funzione che soddisfa la* (1) *soddisferà anche la* (2)*, e viceversa* allora dovremmo convenire che *la* (1) *e la* (2) *sono due modi diversi per descrivere la stessa proprietà.*

Ogni volta che mi viene proposta una f che soddisfa la (1), osservo che ponendo $B := max\{|K|, |M|\}$ anche la (2) sarà verificata.

Ogni volta che mi viene proposta una f she soddisfa la (2), osservo che ponendo $K := -B$ e $M := B$ anche la (1) risulterà soddisfatta.

Una mucca più nervosa delle altre obietta "e se B fosse negativo?". Santa pazienza! Nella (2) si ha che B è $\geq$ di un valore assoluto: quindi B sarà sempre ≥ 0, e anzi sarà zero solo se la f è identicamente zero...

Alla fine le mucche si tacciono. Non so se sono convinte o scoraggiate.

Giornata dura per gli insegnanti....