Primo teorema fondamentale del calcolo in casi più generali

Qui considereremo il primo teorema fondamentale del calcolo in ipotesi più generali. Per la precisione abbandoneremo l'ipotesi che la funzione integranda f sia *continua* in $[a, b]$. Manterremo invece sempre l'ipotesi che f sia *limitata*. In effetti per funzioni non limitate non abbiamo neanche dato senso alle espressioni f *è integrabile su* $[a, b]$ oppure f *non è integrabile su* $[a, b]$.

Per cominciare, avremo bisogno di un lemma.

Lemma Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, e sia f una funzione limitata su $]a, b[$. Sia x_0 un punto di $]a, b[$ (che fissiamo una volta per tutte). Per ogni $\xi \in]x_0, b]$ consideriamo la funzione ausiliaria

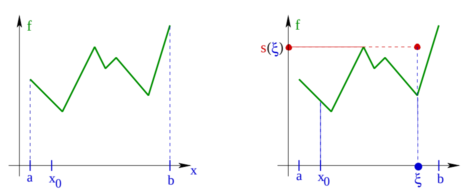
$$s(\xi) = \sup_{x \in]x_0, \xi]} f(x). \tag{1}$$

Valgono allora le seguenti proprietà

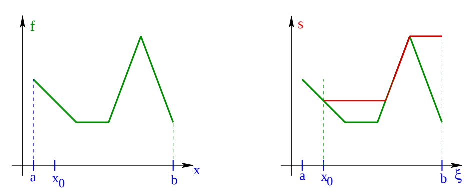
- La funzione s è monotona non decrescente in $]x_0, b[$
- La funzione s ha limite finito per $\xi \to x_0+$
- Se anche la f ha limite per $\xi \to x_0+$ allora

$$\lim_{\xi \to x_0+} s(\xi) = \lim_{\xi \to x_0+} f(\xi) \tag{2}$$

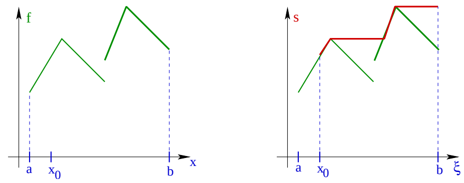
Dimostrazione. Se non ci si spaventa, la dimostrazione è abbastanza semplice (muggiti poco convinti). Bisogna dapprima disegnare alcune possibili f. Per ciascuna di queste si prendono in esame vari valori di ξ, e si cerca di capire quanto vale la corrispondente $s(\xi)$. Alcuni esempi sono dati nella figure seguenti.



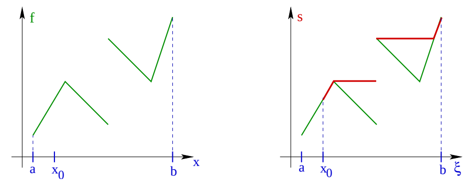
f, uno ξ e il corrispondente $s(\xi)$



Un esempio di f e s



Altro esempio di f e s



Altro esempio di f e s

Una volta che si è capito come è fatta la s, tutto diventa più facile. La proprietà di monotonia è ovvia: se $\xi_1 < \xi_2$ notiamo che $s(\xi_1)$ rappresenta l'estremo superiore dei valori di f su $]x_0, \xi_1]$, mentre $s(\xi_2)$ rappresenta l'estremo superiore dei valori di f su $]x_0, \xi_2]$ (che è un *soprainsieme* del precedente). A livello generale *il "sup" su un insieme più grosso è maggiore del "sup" su un insieme più piccolo*. Quindi $s(\xi_2)$ sarà maggiore di $s(\xi_1)$.

Dalla prima proprietà (monotonia) segue poi immediatamente la seconda (esistenza del limite) grazie al teorema fondamentale sulle successioni (e sulle funzioni!) monotòne.

Dimostriamo infine la terza proprietà, cioè la (2). Supponiamo quindi che esista il limite per $\xi \to x_0+$ di $f(\xi)$, e chiamiamolo ℓ. Per la definizione di limite destro, avremo che

(3) $\forall \varepsilon_f > 0 \; \exists \delta_f > 0 \; \forall t \in]a, b[\;$ se $x_0 < t \leq x_0 + \delta_f$ allora $\ell - \varepsilon_f \leq f(t) \leq \ell + \varepsilon_f$.

Sempre per la definizione di limite, quello che dobbiamo dimostrare è che

(4) $\forall \varepsilon_s > 0 \; \exists \delta_s > 0 \; \forall \xi \in]a, b[\;$ se $x_0 < \xi \leq x_0 + \delta_s$ allora $\ell - \varepsilon_s \leq s(\xi) \leq \ell + \varepsilon_s$.

Per questo, dato un $\varepsilon_s > 0$ prendiamo $\varepsilon_f := \varepsilon_s$ in (3). Visto che (3), per ipotesi, vale, esisterà sicuramente un $\delta_f > 0$ tale che risulti $|f(t) - \ell| \leq \varepsilon_s$ per ogni $t \in]x_0, x_0 + \delta_f]$. Scegliamo allora $\delta_s := \delta_f$ e osserviamo che (attente, mucche! Questo è il punto meno banale della dimostrazione!) *se ξ verifica $x_0 < \xi < x_0 + \delta_s \equiv x_0 + \delta_f$ allora*

$$(5) \qquad s(\xi) = \sup_{t \in]x_0, \xi]} f(t) \geq f(\xi) \geq \ell - \varepsilon_f = \ell - \varepsilon_s$$

perché il "sup" su un insieme è maggiore o uguale a ogni elemento dell'insieme (e per la (3)*); inoltre*

$$(6) \qquad s(\xi) = \sup_{t \in]x_0, \xi]} f(t) \leq \ell + \varepsilon_f = \ell + \varepsilon_s$$

perche' (sempre grazie alla (3)*) $\ell + \varepsilon_s$ risulta essere un maggiorante per l'insieme dei valori $f(t)$ quando t varia in $]x_0, \xi] \subset]x_0, x_0 + \delta_f]$, e il "sup" è il minimo dei maggioranti.* Dalla (5) e dalla (6) insieme discende allora che $\ell - \varepsilon_s \leq s(\xi) \leq \ell + \varepsilon_s$ e quindi la (4) è verificata. $\square$

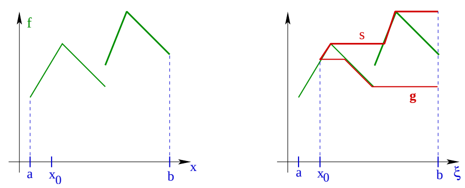
Questo lemma ha molti corollari, in cui scambiando il sup con l'inf e/o la destra con la sinistra, si hanno risultati analoghi con una dimostrazione pressocché identica. In particolare, ponendo

$$g(\xi) = \inf_{x \in]x_0, \xi]} f(x). \tag{7}$$

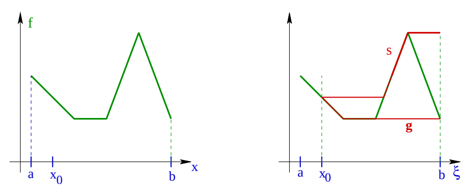
varranno le seguenti proprietà

- La funzione g è monotona non crescente in $]x_0, \xi[$
- La funzione g ha limite finito per $\xi \to x_0+$
- Se anche la f ha limite per $\xi \to x_0+$ allora

$$\lim_{\xi \to x_0+} g(\xi) = \lim_{\xi \to x_0+} f(\xi). \tag{8}$$



Un esempio di f, s, e g



Altro esempio di f, s, e g

Si hanno poi altre due versioni in cui la destra viene scambiata con la sinistra. Gli enunciati e le dimostrazioni di queste facili varianti sono lasciate al lettore (fieri muggiti di protesta).

Siamo quindi pronti a dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo in ipotesi più generali.

Primo teorema fondamentale del calcolo in ipotesi più generali

Enunciato Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, e sia f una funzione limitata e integrabile su $[a, b]$. Ricordiamo che se una funzione è limitata e integrabile su un intervallo $[a, b]$ allora essa risulta limitata e integrabile su ogni sub-intervallo $[a, x] \subseteq [a, b]$. Quindi per ogni $x \in [a, b]$ possiamo definire la funzione

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

(intendendo che $F(a) = 0$). Allora (mucche: qui comincia la tesi!) per ogni $x_0 \in [a, b[$ in cui la funzione f ha limite destro, la funzione F risulta esserere *derivabile a destra in* x_0, e risulta

$$F'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f(x). \tag{10}$$

Dimostrazione Ricordando la definizione di derivata destra, abbiamo

$$F'_+(x_0) \equiv \lim_{h \to 0+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \tag{11}$$

ed usando la definizione di F (cioè la (9)) e la additività dell'integrale si ha

$$F'_+(x_0) \equiv \lim_{h \to 0+} \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h}. \tag{12}$$

Fin qui, la dimostrazione è stata *identica* a quella data nel caso in cui la f è continua (muggiti di assenso). Ora, usando la (1) e la (7) avremo (anche senza la continuità di f) che per ogni $h > 0$ e per ogni $t \in]x_0, x_0 + h]$

$$g(x_0 + h) \leq f(t) \leq s(x_0 + h). \tag{13}$$

Integrando la (13) rispetto a t tra x_0 e $x_0 + h$ (e osservando che $g(x_0 + h)$ e $s(x_0 + h)$ non dipendono da t, e che l'ampiezza dell'intervallo $]x_0, x_0 + h]$ vale h), abbiamo

$$hg(x_0 + h) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leq hs(x_0 + h). \tag{14}$$

Dividendo la (14) per h si ha facilmente che

$$g(x_0 + h) \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \leq s(x_0 + h). \tag{15}$$

Passando al limite in (15) per $h \to 0+$ e utilizzando la (2), la (8), e il teorema dei carabinieri avremo

$$\lim_{h \to 0+} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0+} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h}, \tag{16}$$

che insieme alla (12) porta facilmente alla (10). $\square$

Anche questo teorema ha parecchie varianti, che si dimostrano in modo quasi identico. In particolare si può dimostrare che per ogni $x_0 \in]a, b]$

- se la f ha limite sinistro per x che tende a x_0 allora la F è *derivabile a sinistra in* x_0 e la sua derivata sinistra coincide col limite sinistro di f.

Mettendo poi insieme i due risultati (sul limite destro e sul limite sinistro) si ha che per ogni $x_0 \in]a, b[$

- se f ha limite (bilatero stavolta!) per x che tende a x_0 allora la F è *derivabile in* x_0 e la sua derivata coincide col limite di f.

Per finire, per ogni $x_0 \in]a, b[$,

- se la f è continua in x_0 (e quindi ha limite, e il limite vale $f(x_0)$) allora la F risulta derivabile in x_0 e la sua derivata vale $f(x_0)$.