Equazioni differenziali - generalità

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Le equazioni differenziali sono equazioni nelle quali 1) l'incognita è una funzione, e 2) nella equazione compaiono anche alcune *derivate* della funzione incognita.

Si dice che un'equazione differenziale ha ordine m se la derivata di ordine massimo che compare nella equazione è una derivata di ordine m.

Se la funzione incognita è una funzione di una sola variabile, le sue derivate saranno derivate ordinarie e si parlerà di *equazione differenziale ordinaria.* Se invece la funzione incognita è una funzione di più variabili, le sue derivate saranno derivate parziali e si parlerà di *equazione differenziale alle derivate parziali*
Esempio:

$$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(dove g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione differenziale ordinaria di ordine 2.

Esempio:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x,t)$$

(dove ancora g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione alle derivate parziali del primo ordine (infatti nella equazione compaiono solo derivate prime). La stessa equazione può essere scritta in altri modi: $u_t + u_x = g$ in cui ovviamente $u_t = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, oppure $u_{/t} + u_{/x} = g$, oppure $u_{,t} + u_{,x} = g$ tutte con lo stesso significato.

Esempio:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t)$$

(dove ancora g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione alle derivate parziali del secondo ordine (infatti nella equazione compare una derivata seconda).

La forma generale di un'equazione differenziale di ordine 2 può essere scritta come :

$$F(\mathbf{x}, u, \nabla u, D_2 u) = 0$$

in cui:

- $\mathbf{x} = (x_1, .., x_n)$ è la variabile indipendente
- u è la funzione incognita
- ∇u è il vettore delle derivate prime di u
- $D_2 u$ è la matrice delle derivate seconde di u
- $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$

A volte la dipendenza di F da $\mathbf{x}$ e dalle derivate di u viene sottintesa e si scrive semplicemente

$$F(u) = 0$$

Equazioni differenziali lineari

Le equazioni differenziali lineari sono equazioni che possono essere scritte nella forma

$$F(u) = g$$

dove g è una funzione nota, e F verifica

$$F(\alpha u + \beta w) = \alpha F(u) + \beta F(w)$$

per ogni coppia di funzioni u e w e per ogni coppia di numeri reali α e β. Se $g = 0$ l'equazione è detta essere *omogenea.*

Esempio:
$u_t + u_x = 0,$

è una equazione alle derivate parziali del primo ordine lineare ed omogenea. Ma anche la

$$a(\mathbf{x})u_t + b(\mathbf{x})u_x = 0$$

con $a(\mathbf{x})$ e $b(\mathbf{x})$ funzioni note è una equazione alle derivate parziali del primo ordine lineare ed omogenea. Volendo indicare la differenza tra le due si dirà che la prima è anche *a coefficienti costanti* e la seconda *a coefficienti variabili.* Per contro l'equazione

$$a\,u_t + b\,u_x = g,$$

dove g è una funzione nota (e non identicamente nulla), sarà una equazione alle derivate parziali del primo ordine lineare *non omogenea*: a coefficienti costanti se a e b sono costanti (altrimenti, a coefficienti variabili).

Equazioni differenziali non lineari

Basta che un ingrediente dell'equazione non sia lineare, per esempio al quadrato, che l'equazione viene detta *non lineare.*
Esempio:

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2 = g.$$

Tra queste vengono spesso distinte dalle altre le equazioni *quasi-lineari* e quelle *semi-lineari.*

Le equazioni **quasi-lineari** sono quelle in cui il coefficiente della derivata di ordine massimo dipende (o può dipendere) dalla funzione stessa (u) e dalle derivate di ordine inferiore.

Esempio:

1. $u_t + uu_x = g$
2. $div(k(u)grad(u)) + u\,u_x = g \Rightarrow \nabla k(u) \cdot \nabla u + k(u)\Delta u + u\,u_x = g.$

Quello che conta è il coefficiente della derivata di ordine massimo (nel primo caso u davanti a u_x e nel secondo caso $k(u)$ davanti a Δu)
Invece la

1. $u_t + (u_x)^2 = g$

non è quasi-lineare.

Nelle equazioni **semi-lineari** il coefficiente della derivata di ordine massimo può dipendere dalla variabile indipendente, ma **non** dipende dalla funzione incognita né dalle sue derivate di ordine inferiore.

1. $(1+|x|^2)\Delta u + u^2 = g$ è semilineare
2. $|u|^2 \Delta u = g$ non è semilineare

Problema ben posto

Il problema si dice *ben posto* se:

1. ammette una soluzione
2. la soluzione è unica
3. vale la dipendenza continua dai dati (detta anche **Stabilità** del problema), cioè

   se $dist(f,g) \to 0$ **allora** $dist(u^f, u^g) \to 0$

L'ultima condizione significa che se f e g sono i dati del problema (proprietà del materiale, carico applicato, ecc) e sono "vicini", allora le due soluzioni u^f, u^g (cioè la soluzione unica del problema con dato f e con dato g) sono "vicine".
Vediamo meglio cosa vuol dire "vicini": bisogna introdurre una misura della distanza tra due oggetti (altrimenti detta **norma** della differenza)

- se i dati sono due vettori: $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ e $\underline{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ possiamo valutare la loro distanza $dist(\underline{f}, \underline{g})$ in vari modi. Ad esempio:

  $dist(\underline{f}, \underline{g}) := max_{1\le i\le n} \mid f_i - g_i \mid = \parallel \underline{f} - \underline{g} \parallel_\infty$ *norma del massimo*

  $dist(\underline{f}, \underline{g}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i - g_i)^2}$ *norma euclidea*

- se i dati sono due funzioni: $f(x), g(x) : I \to \mathbb{R}$

$$dist(f,g) := max_{x\in I} \mid f(x) - g(x) \mid$$

$$dist(f,g) := \sqrt{\int_I (f(x) - g(x))^2}$$

Dunque la terza condizione perchè il problema possa definirsi ben posto può essere riscritta nel seguente modo:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \text{ tale che: se } dist(f,g) \le \delta \text{ allora } dist(u^f, u^g) \le \varepsilon$$

In pratica però (come faremo noi qui) si preferisce verificare la condizione (leggermente più stringente):

esiste una costante $C > 0$ tale che: se $dist(f, g) \leq \varepsilon$ allora $dist(u^f, u^g) \leq C\varepsilon$

Esempio di problema ben posto:
Consideriamo il problema seguente, con a, b, f, α, β dati e $a < b$.

$$(P)\ \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall\, x \in [a, b] \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Dobbiamo verificare le condizioni 1-2-3.
• Esistenza di una soluzione: dipende dalla regolarità del dato f. Se, ad esempio, f è una funzione continua, l'equazione $-u''(x) = f(x)$ assicura che la derivata seconda di u è continua nell'intervallo $[a, b]$. Quindi la soluzione esiste nello spazio delle funzioni C^2 (cioè continua con la derivata prima e la derivata seconda).
• Unicità della soluzione. Il problema è lineare quindi l'unicità può essere dimostrata per contraddizione: supponiamo che (P) abbia due soluzioni diverse $u_1 \neq u_2$; ciò significa che:

$$\begin{cases} -u_1''(x) = f(x) \text{ in } [a, b] \\ u_1(a) = \alpha \\ u_1(b) = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} -u_2''(x) = f(x) \text{ in } [a, b] \\ u_2(a) = \alpha \\ u_2(b) = \beta \end{cases}$$

Adesso eseguendo la differenza membro a membro tra le equazioni, e ponendo $w := u_1 - u_2$: si ha che la funzione $w(x)$ risolve il problema:

$$\begin{cases} w''(x) = 0 \text{ in } [a, b] \\ w(a) = 0 \\ w(b) = 0. \end{cases}$$

Ora $w''(x) = 0$ implica che $w(x)$ deve essere un polinomio di primo grado, cioè una retta $w(x) = C_1 x + C_2$, che, imponendo le condizioni ai limiti, deve annullarsi nei due punti (distinti) $x = a$ e $x = b$. Ne consegue che necessariamente $w = 0$ e quindi $u_1 = u_2$.
• Dipendenza continua dai dati: immaginiamo di perturbare il dato f facendolo diventare $g = f + \varepsilon$ (per semplicità supporremo che la perturbazione ε sia una costante positiva, ma il risultato vale ovviamente più in generale). In

particolare avremo che $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$. Risolviamo ora il problema:

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} -w''(x) = g(x) = f(x) + \varepsilon \\ w(a) = \alpha \\ w(b) = \beta \end{cases}$$

Si vuole valutare l'errore tra la soluzione u di (P) e la soluzione w del problema perturbato (P_ε). Facendo la differenza $(P)-(P_\varepsilon)$ si vede che la funzione differenza $v(x) = u(x) - w(x)$ risolve

$$\begin{cases} -u''(x) - (-w''(x)) = f - (f+\varepsilon) = -\varepsilon \Rightarrow u''(x) - w''(x) = \varepsilon \Rightarrow v''(x) = \varepsilon \\ u(a) - w(a) = 0 \Rightarrow v(a) = 0 \\ u(b) - w(b) = 0 \Rightarrow v(b) = 0 \end{cases}$$

La derivata seconda si v è una costante ($v''(x) = \varepsilon$) e dunque v sarà un polinomio di secondo grado: $v(x) = \frac{\varepsilon}{2}x^2 + C_1 x + C_2$. Imponendo le condizioni ai limiti si ha

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{2}a^2 + C_1 a + C_2 = 0 \\ \frac{\varepsilon}{2}b^2 + C_1 b + C_2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si ha immediatamente $C_1(a-b) = -\frac{\varepsilon(a^2-b^2)}{2}$ da cui banalmente $C_1 = -\frac{\varepsilon(a+b)}{2}$. Inserendo questo valore nella somma delle equazioni si ha allora $-2C_2 = \frac{\varepsilon[(a^2+b^2)-(a+b)^2]}{2} = -\varepsilon ab$ da cui $C_2 = \frac{\varepsilon ab}{2}$ e quindi $v(x) = \frac{\varepsilon}{2}(x^2 - (a+b)x + ab)$. Notiamo che la v è una parabola che si annulla in a e in b. Quindi il suo valore assoluto, nell'intervallo (a,b), avrà il suo massimo nel punto di mezzo dell'intervallo (a,b), cioè per $x = (a+b)/2$ (fate un disegnino se avete dei dubbi). Quindi in (a,b) il massimo di $|v|$ vale

$$|v((a+b)/2)| = \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{2} + ab\right| = \frac{(a-b)^2}{8}\varepsilon$$

cioè una quantità fissa $C(a,b)$ volte ε.

Ricordando che $v(x)$ è la differenza tra la soluzione vera u e la soluzione perturbata w, si è trovato che

$$\|u-w\|_\infty \leq C(a,b)\|f-g\|_\infty$$

Quando $\varepsilon \to 0$, cioè quando l'errore sui dati va a 0, anche l'errore sui risultati tenderà a zero. La conclusione è che il problema è **ben posto**.

Equazione di trasporto

L'equazione di trasporto è un'equazione differenziale del primo ordine, che nella forma più semplice è del tipo:

$$u_t + cu_x = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

dove t è il tempo, x lo spazio (e l'incognita è dunque una funzione dello spazio e del tempo: $u = u(x,t)$) e c è una costante che ha le dimensioni di una velocità. Infatti, svolgendo l'analisi dimensionale si vede che:

$$u_t : [u] \cdot [t^{-1}],\; u_x : [u] \cdot [\ell^{-1}],\; \longrightarrow\; c : [\ell \cdot t^{-1}]$$

Infine, $f(x,t)$ è una funzione data dello spazio e del tempo.

La condizione da aggiungere all'equazione differenziale per avere una soluzione unica è il valore della u al tempo 0:

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Il problema omogeneo

Come primo passo (secondo una procedura classica nello studio delle equazioni differenziali lineari), ci occuperemo del problema omogeneo (che corrisponde quindi alla scelta $f(x,t) = 0$).

Quindi cercheremo di risolvere il problema di Cauchy omogeneo:

$$\begin{cases} (i)\; u_t + cu_x = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R},\; t > 0 \\ (ii)\; u(x,0) = u_0(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Le linee caratteristiche

Si vuole sapere come si propaga nello spazio e nel tempo il dato iniziale $u_0(x)$. In particolare cerchiamo (se ce ne sono!) delle linee $x = x(t)$ nel piano (x,t) (che chiameremo *linee caratteristiche*) tali che il valore della soluzione u lungo tali linee si mantenga costante (e come vedremo, ce ne sono tantissime)

Chiaramente, per qualunque scelta della funzione $x(t)$, il valore della soluzione u nel punto $(x(t), t)$ sarà dato dalla funzione (della sola t!)

$$v(t) = u(x(t), t).$$

Dire che la soluzione u si mantiene costante lungo la curva $x = x(t)$ (cioè dire che $x(t)$ è una linea caratteristica) equivale a dire che la funzione $v(t)$ si mantiene costantemente uguale al valore $v(0) = u(x(0), 0)$ che la u assume alla intersezione tra l'asse $t = 0$ e la curva $x = x(t)$. Prendendo un'altra curva caratteristica $x = x(t)$ (abbiamo detto che ce ne sono tante!) cambierà la v e cambierà il valore costante che la u assume sulla curva. Calcoliamo adesso la derivata prima di $v(t)$ (totale perchè v dipende solo da t):

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_t. \tag{2}$$

Confrontando l'equazione (2) con quella del problema di Cauchy (1)- *(i)*, ci accorgiamo che: se scegliamo la $x(t)$ in modo che $\frac{dx}{dt}$ sia proprio uguale alla velocità c che compare in (1) si ha (usando la (2) e poi la (1)-*(i)*):

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\, u_x + u_t = 0.$$

Quindi su ogni linea $\frac{dx}{dt} = c$ si ha che $\frac{dv}{dt} = 0$ cioè $v = \textit{costante} = v(0) = u(x(0), 0)$. Naturalmente, le linee $\frac{dx}{dt} = c$ sono tutte le rette $x = ct + x_0$ al variare del valore iniziale $x_0 = x(0)$.

Notiamo che, in particolare, per ogni punto (x^*, t^*) esiste una e una sola retta del tipo $x = ct + x_0$ che passa per il punto: in altre parole, esiste un unico x_0 tale che $x^* = ct^* + x_0$ e tale valore è dato da $x_0 = x^* - ct^*$. Quindi nel punto (x^*, t^*) il valore di u sarà uguale al suo valore in x_0 cioè uguale a $u_0(x^* - ct^*)$. Visto che questo si verifica per **ogni** punto (x^*, t^*), possiamo concludere che la soluzione del problema di Cauchy è data esattamente da

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \tag{3}$$

Controprova: prendiamo l'espressione in (3) e vediamo che soddisfa il problema (1). Intanto, per $t = 0$ è ovvio che la u in (3) vale $u_0(x)$, come richiesto in (1)-*(ii)*. Poi calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_0(x - ct)) + c\frac{\partial}{\partial x}(u_0(x - ct)) = u_0'(x - ct)(-c) + c\, u_0'(x - ct) = 0$$

e l'equazione in (1)-*(i)* è anch'essa verificata.

Riassumendo: il valore della soluzione in un generico punto (x, t) è pari al valore del dato iniziale u_0 nel punto x_0 di intersezione tra l'asse delle x (cioè $t = 0$) e la retta con pendenza $1/c$ passante per (x, t), cioè la retta $x = ct+x_0$ (che nel piano (x, t) si scrive più comunemente come $t = (1/c)(x - x_0)$).

Questo **metodo** è detto **metodo delle caratteristiche**. L'analisi appena fatta ci dice che l'onda iniziale viene trasportata lungo le linee caratteristiche e spostata con pendenza $1/c$. Conseguentemente, più alta è la velocità c, più velocemente l'onda iniziale si propaga (come intuitivamente ci si aspetta).

Nelle figure seguenti si rappresenta l'andamento della soluzione in corrispondenza allo stesso dato iniziale $u_0(x)$ e per diversi valori della velocità.

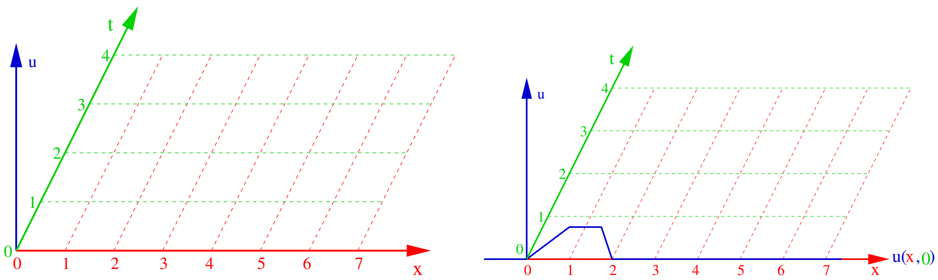


Figura 1: A sinistra: rette parallele agli assi nel piano (x, t). A destra il dato iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$

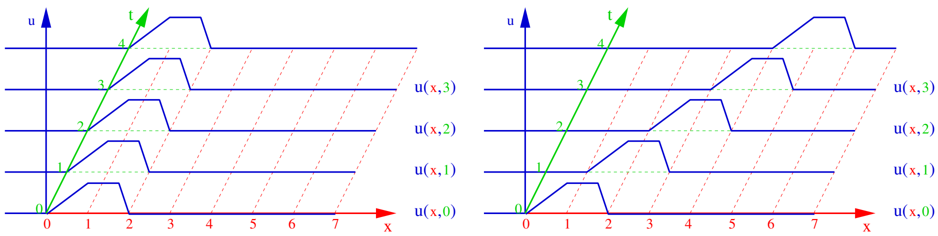


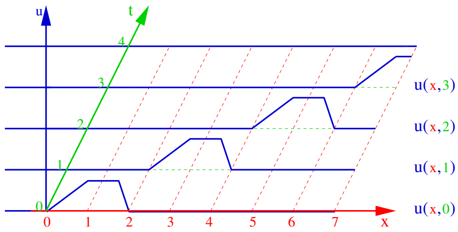
Figura 2: A sinistra: velocità $c = 0$ $(u_t = 0) \Rightarrow u(x, t) \equiv u_0(x) \forall t$. A destra la soluzione $u(x, t)$ corrispondente a $c = 1$ $(u_t + u_x = 0)$

Esempio:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione è $u_0(x - ct)$, quindi:

$$u(x, t) = \sin[\pi(x - ct)]$$



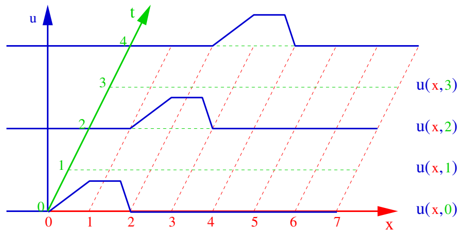


Figura 3: Andamento della soluzione $u(x,t)$ in corrispondenza della velocità: $c = 2$ (a sinistra), $c = 1/2$ (a destra).

sarà la soluzione del problema omogeneo nel generico punto dello spazio (x,t).

Problemi non omogenei

La trattazione di problemi *non omogenei* si farà generalizzando le idee applicate finora, e in particolare utilizzerà esplicitamente le soluzione del problema omogeneo corrispondente (in cui si pone il valore della *forzante* f uguale a zero).

Per comodità di notazioni chiamiamo allora $\tilde{u}(x,t)$ la soluzione del problema omogeneo appena trattato, cioè:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + c\tilde{u}_x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4}$$

da cui (come abbiamo già visto):

$$\boxed{\tilde{u}(x,t) = u_0(x - ct) \quad \forall x, t}$$

Il caso di una forzante costante

Adesso consideriamo l'equazione di trasporto con una forzante costante (che, per semplicità, poniamo in un primo momento uguale a 1). Consideriamo quindi il problema:

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5}$$

Cerchiamo la soluzione come somma della soluzione omogenea con un'altra funzione: $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$, dove la funzione w dovrà quindi verificare

$$\begin{cases} (i)\ w_t + cw_x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ (ii)\ w(x,0) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6}$$

Verifichiamo che se w risolve il problema (6) allora la funzione somma di $\tilde{u}$ e di w risolve il problema (5). Quindi verifichiamo che la $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)+w(x,t)$ rispetta l'equazione differenziale e il dato iniziale:

- $u_t + cu_x = \tilde{u}_t + w_t + c(\tilde{u}_x + w_x) = (\tilde{u}_t + c\tilde{u}_x) + (w_t + cw_x) = 0 + 1 = 1.$
- $u(x,0) = \tilde{u}(x,0) + w(x,0) = u_0(x) + 0 = u_0(x)$

Quindi si deve trovare la $w(x,t)$ che verifica (6). Per questo si introduce $v(t) := w(x(t),t)$ e quindi, usando il metodo delle caratteristiche e svolgendo gli stessi passaggi svolti nel caso del problema omogeneo si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c \\ \dfrac{dv}{dt} = 1 \end{cases}$$

Ciò significa che sulle linee caratteristiche $x = x(t) = ct + x_0$ la $\dfrac{dv}{dt}$ deve essere uguale a 1; integrando si ottiene:

$$\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t 1 ds \Rightarrow v(t) - v(0) = t$$

La condizione iniziale (6)-*(ii)* implica che $v(0) = w(x(0),0) = 0$. Ne segue che $v(t) = t$, cioè $v(t) = w(x(t),t) = t$. Notiamo anche che, a posteriori, si verifica facilmente che la funzione $w(x,t) = t$ risolve il problema (6). La soluzione del problema (5) sarà dunque:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t) = u_0(x - ct) + t$$

Se in (5), al posto di avere come costante 1, si ha una generica costante k, cioè se dobbiamo risolvere il problema:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = k \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{7}$$

si troverà come soluzione:

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + kt}$$

Esempio:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = k \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8}$$

La soluzione $u(x,t)$ sarà data da:

$$u(x,t) = \sin(\pi(x-ct)) + kt$$

Per capire se la soluzione trovata è corretta, bisogna verificare se $u(x,t)$ rispetta le condizioni del problema (8):

- $u_t + cu_x = \cos(\pi(x-ct))(-\pi c) + k + c[\cos(\pi(x-ct))(\pi) + 0] = -(\pi c)\cos(\pi(x-ct)) + k + (\pi c)\cos(\pi(x-ct)) = k$
- $u(x,0) = \sin(\pi(x-0)) + k \cdot 0 = \sin(\pi x)$

Poiché entrambe le condizioni sono rispettate, la $u(x,t)$ è la soluzione corretta.

Il caso di una forzante che dipende solo da t

Modifichiamo ulteriormente il problema di trasporto:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(t) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{9}$$

Si cerca sempre una soluzione $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$ in cui $\tilde{u}(x,t)$ è la soluzione del problema omogeneo e $w(x,t)$ è la soluzione di

$$\begin{cases} w_t + cw_x = f(t) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ w(x,0) = 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Procedendo come prima, si introduce $v(t) := w(x(t),t)$ funzione solo del tempo, e derivando si ottiene:

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Sulle linee $\dfrac{dx}{dt} = c$ si ha $\dfrac{dv}{dt} = f(t)$, e ciò significa dire che, sulle linee caratteristiche, la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c \to x = x(t) = ct + x_0 \\ \dfrac{dv}{dt} = f(t) \to \displaystyle\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(s)ds \Rightarrow v(t) - v(0) = \int_0^t f(s)ds \end{cases}$$

Per definizione: $v(0) = w(x(0), 0) = w(x_0, 0) = 0$, quindi la soluzione del problema sarà:

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s)ds.}$$

Verifichiamo se questa è la soluzione corretta di (9):

- $u_t + cu_x = u_0'(x - ct)(-c) + f(t) + c[u_0'(x - ct) + 0] = f(t)$
- $u(x, 0) = u_0(x) + \int_0^0 f(s)ds = u_0(x) + 0 = u_0(x)$

La verifica è soddisfatta.

Il caso di una forzante che dipende solo da x

Modifichiamo ulteriormente il problema di trasporto, nel caso di una forzante che sia funzione della sola x:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x) & \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{10}$$

Si cerca sempre una soluzione $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$ in cui $\tilde{u}(x,t)$ è la soluzione del problema omogeneo e $w(x,t)$ è la soluzione particolare. In questo caso la $w(x,t)$ dovrà rispettare:

$$\begin{cases} w_t + cw_x = f(x) & \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ w(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Come prima, si introduce la funzione (solo del tempo) $v(t) := w(x(t), t)$. Derivando si ottiene:

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Sulle linee $\frac{dx}{dt} = c$ si ha $\frac{dv}{dt} = f(x)$, e ciò significa dire che sulle linee caratteristiche la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c \rightarrow x = x(t) = ct + x_0 \\ \dfrac{dv}{dt} = f(x) \rightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(x(s))ds \end{cases}$$

e quindi

$$v(t) = \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(x(s))ds = \int_0^t f(cs + x_0)ds.$$

Usando la sostituzione $z = cs + x_0$ si ha immediatamente che

$$ds = \frac{1}{c} dz \qquad s = 0 \to z = x_0 \qquad s = t \to z = ct + x_0$$

da cui

$$\int_0^t f(cs + x_0)ds = \frac{1}{c} \int_{x_0}^{ct+x_0} f(z)dz = \frac{1}{c} \Big[F(ct + x_0) - F(x_0)\Big] \tag{11}$$

(dove F è una primitiva di f, cioè $F' = f$), che fornisce quindi:

$$w(x,t) = \frac{1}{c}[F(x) - F(x - ct)]$$

Quindi la soluzione di (10) è:

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + \frac{1}{c}[F(x) - F(x - ct)]}$$

Verifichiamo come al solito che questa sia effettivamente la soluzione corretta di (10):

- $u_t + cu_x = u_0'(x - ct)(-c) + \frac{1}{c}\Big[0 - (-c)f(x - ct)\Big] +$
  $+ c\Big[u_0'(x - ct) + \frac{1}{c}[f(x) - f(x - ct)]\Big] = f(x)$
- $u(x, 0) = u_0(x - 0) + \frac{1}{c}[F(x) - F(x - 0)] = u_0(x)$

La verifica è soddisfatta.

Esercizio: Prendiamo $f(x) = \sin(x)$, con $u_0(x) = \cos(x)$ e $c = 10$. Il problema diventa

$$\begin{cases} u_t + 10u_x = \sin(x) & \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = \cos(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{12}$$

Procedendo come sopra avremo che $u_0(x - ct)$ sarà data da

$$u_0(x - ct) = \cos(x - 10t),$$

che la primitiva di $f(x) = \sin(x)$ sarà data da

$$F(x) = -\cos(x)$$

e quindi la nostra formula risolutiva fornisce

$$u(x,t) = u_0(x-10t)+\frac{1}{10}[F(x)-F(x-10t)] = \cos(x-10t)+\frac{1}{10}[\cos(x-10t)-\cos(x)]$$
$$= \frac{11}{10}\cos(x-10t) - \frac{1}{10}\cos(x)$$

Adesso bisogna verificare se $u(x,t)$ è la soluzione corretta; essa deve rispettare entrambe le condizioni del problema (12):

- $u_t+cu_x = \frac{11}{10}(-10)(-\sin(x-10t))+10\Big[-\frac{11}{10}\sin(x-10t)+\frac{1}{10}\sin(x) =$
  $= 11\sin(x-10t) - 11\sin(x-10t) + \sin(x) = \sin(x)$
- $u(x,0) = \frac{11}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\cos(x) = \cos(x)$

Considerazioni finali

Riassumendo: Il metodo delle caratteristiche permette di lavorare solo sui punti delle rette caratteristiche date da $x = ct + x_0$ in cui x_0 è l'intersezione tra $x = x(t)$ e $t = 0$. Il valore della soluzione in x_0 viene trasportato lungo la linea caratteristica. Nel caso del problema omogeneo ($f = 0$) per trovare il valore della soluzione in un punto generico $(\overline{x}, \overline{t})$, si deve:

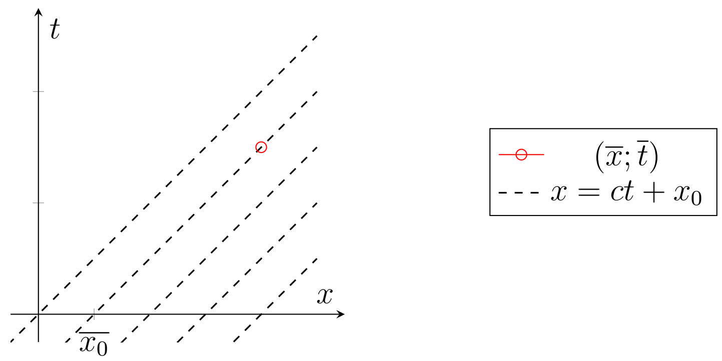
1. scrivere l'equazione della retta caratteristica passante per quel punto (parallela alla generica retta $x = ct$). Tale retta ha equazione $x - \overline{x} = c(t - \overline{t})$.

2. trovare la sua intersezione con $t = 0$, che chiamiamo $\overline{x_0}$. Risulta $\overline{x_0} = \overline{x} - c\overline{t}$

3. dopodiché si ha $u(\overline{x}, \overline{t}) = u(\overline{x_0}, 0) = u_0(\overline{x_0})$, cioè pari al dato iniziale in $\overline{x_0}$

Questo procedimento si può usare per un qualsiasi punto (x,t) del piano (vedere la figura)

Se $f \neq 0$, il valore iniziale sarà comunque trasportato lungo le caratteristiche e sarà perturbato in funzione di f.



Il caso di c non costante

Finora si èvisto solo il caso di c =costante. In molti problemi reali la velocità del trasporto può variare.

Il caso in cui la velocità sia una funzione assegnata (e ragionevolmente regolare) di x e/o di t non presenta grosse difficoltà concettuali, anche se i conti saranno, in generale, più complicati. In particolare, esisteranno ancora le linee caratteristiche, che saranno soluzioni $x = x(t)$ della equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = c(x,t)$$

per diversi valori del dato iniziale

$$x(0) = x_0$$

(per ogni x_0 avremo una linea diversa).

Purtroppo, in una grandissima varietà di applicazioni di grande interesse pratico la velocità dipende anche dalla soluzione stessa. Si ha cioè $c = c(x,t,u)$. Questo rende il problema *molto* più complicato, sia dal punto di vista teorico (esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni) che dal punto di vista numerico (algoritmi e codici per il calcolo approssimato della soluzione). Anche il caso più semplice

$$u_t + u\,u_x = 0,$$

detta *equazione di Burgers inviscida*, e che in realtà, per motivi difficili da spiegare qui, andrebbe scritta $2u_t + (u^2)_x = 0$, pur con dati iniziali $u_0(x)$ molto regolari (ad esempio: derivabili infinite volte) può essere una sorgente di notevoli difficoltà (necessità di definire soluzioni in senso generalizzato, mancanza di unicità, mancanza di regolarità, e risoluzione numerica parecchio più complessa).

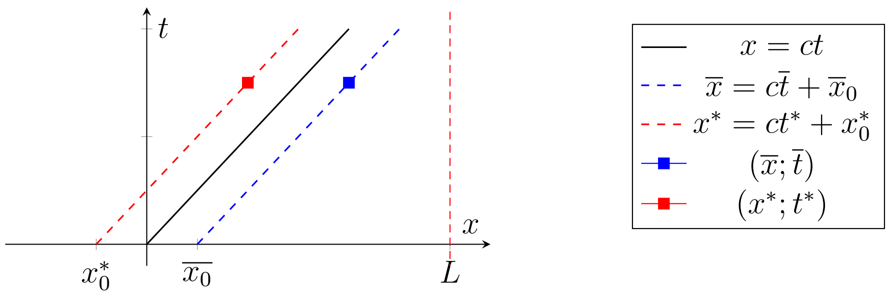
L'equazione di Burgers, sfortunatamente, è un caso ipersemplificato delle equazioni che descrivono il moto dei fluidi (equazioni di Eulero e di Navier-Stokes), e che entrano in una grandissima varietà di importanti applicazioni.

Problema ai limiti per l'equazione del trasporto

Finora è stato considerato il problema di trasporto, omogeneo e non omogeneo, su tutta la retta reale, cioè per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. In particolare è sufficiente conoscere il valore iniziale della soluzione, per conoscerla ovunque. Il problema studiato è quindi un cosiddetto *problema ai valori iniziali* e quindi fa parte dei *problemi di Cauchy*.
Ora ci occuperemo di un problema alle derivate parziali di tipo più classico. In particolare, consideriamo un problema di trasporto *su un intervallo finito* $(0, L)$ di $\mathbb{R}$. Il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

con c costante che, per fissare le idee, supponiamo positiva ($c > 0$).



Cominciamo col procedere come prima col metodo delle caratteristiche. Essendo c costante le caratteristiche saranno ancora delle rette nel piano (x, t) con pendenza $1/c$. In particolare, la caratteristica passante per il punto (x_1, t_1) avrà equazione $x - x_1 = c(t - t_1)$ e incontrerà l'asse delle x (cioè $t = 0$) nel punto $x_0 = x_1 - ct_1$. Se tale punto appartiene all'intervallo $[0, L]$ (come per il caso $(x_1, t_1) = (\overline{x}, \overline{t})$ nella figura) avremo $u(x_1, t_1) = u_0(x_0) = u_0(x_1 - ct_1)$. Se invece il punto x_0 non cade nell'intervallo $[0, L]$ il valore iniziale non esiste (infatti $u_0(x)$ è assegnata solo per $x \in [0, L]$).

Con riferimento alla nostra figura, se si prende un punto (x^*, t^*) che sta sopra la caratteristica che passa per 0, e si traccia la linea caratteristica passante per (x^*, t^*), ci si accorge che l'intersezione con l'asse x sta fuori dall'intervallo $[0, L]$ e quindi non si hanno informazioni da trasmettere lungo la linea caratteristica. È necessario avere un'altra condizione, questa volta ai limiti, ossia serve avere un dato assegnato dove le caratteristiche entrano (in questo caso, poiché $c > 0$, per $x = 0$). Aggiungendo un *dato al bordo* per

$x = 0$ il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \ 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = g^S(t) \ \forall t > 0 \end{cases}$$

Naturamente i dati dovranno soddisfare la condizione di continuità in $(0,0)$ che nel nostro caso si traducono nella richiesta che $u_0(0) = g^S(0)$.

Per trovare la soluzione in un generico punto come (x_1, t_1) si opera in maniera molto simile a quella di prima: si calcola la linea caratteristica passante per quel punto: come abbiamo già visto: $(x - x_1) = c(t - t_1)$; si determina poi l'intersezione con l'asse delle x cioè con $t = 0$: $x_0 = x_1 - ct_1$. A questo punto si osserva *dove cade* l'intersezione x_0 così trovata:

- se $x_0 \in [0, L] \rightarrow u(x_1, t_1) = u_0(x_1 - ct_1)$
- se $x_0 \notin [0, L]$ si calcola l'intersezione con l'asse $t \rightarrow$

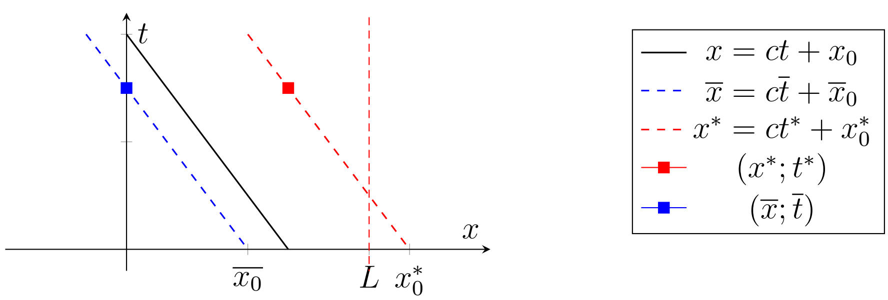
$$\begin{cases} x = 0 \\ x - x_1 = c(t - t_1) \end{cases} \quad \Rightarrow t_0 = -\frac{x_1}{c} + t_1$$

e sapendo che sulla linea caratteristica la u deve essere costante si pone

$$u(x_1, t_1) = g^S(t_0)$$

.

Si ragiona esattamente allo stesso modo se $c < 0$ (vedi figura):



Questa volta bisogna dare una condizione ai limiti per $x = L$ (nel secondo estremo).

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ u(L,t) = g^D(t) \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

Naturamente in questo caso i dati dovranno soddisfare la condizione di continuità in $(L, 0)$ che ora si traducono nella richiesta che $u_0(L) = g^D(0)$.

Quindi nel generico punto (x_1, t_1), posto $x_0 = x_1 - ct_1$, si controlla se $x_0 \leq L$ oppure $x_0 > L$. Nel primo caso, si ha

$$u(x_1, t_1) = u_0(x_0)$$

Altrimenti (se $x_0 > L$) si determina l'intersezione con $x = L$ e si trova $t_0 = t_1 + (L - x_1)/c$; la soluzione sarà

$$u(x_1, t_1) = g^D(t_0)$$

.

La differenza sostanziale tra un problema di trasporto su tutta la retta reale o solo su un intervallo è che la condizione iniziale non basta, ma serve anche una condizione sul bordo. Tale condizione aggiuntiva deve essere imposta sul bordo destro se le linee caratteristiche hanno pendenza negativa, e sul bordo sinistro se la pendenza delle linee caratteristiche è positiva. Si riassumono i due casi dicendo che la condizione va imposta all'***inflow*** cioè sul lato in cui le linee caratteristiche ***entrano*** (naturalmente, il "movimento" delle caratteristiche va sempre inteso nella direzione dei *tempi crescenti*). La condizione viene scritta con $u(\cdot, t)$ in cui il punto identifica il bordo sinistro o destro in base all'inflow. In generale in problema è scritto così

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ u(\cdot, t) = g(t) \quad \forall t > 0 \end{cases} \tag{13}$$

La soluzione $u(x, t)$ vale:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct) \text{ se } x_0 = x - ct \in [0, L] \\ g(\bar{t}) \text{ se } x_0 = x - ct \notin [0, L] \end{cases}$$

$g(\bar{t})$ è il valore del dato all'inflow nel punto di intersezione $\bar{t}$ della caratteristica con l'inflow.
Come esercizio, verifichiamo se il problema è ben posto:

1. *Esiste una soluzione?* Sì perché abbiamo scritto esplicitamente l'espressione analitica della soluzione.

2. *La soluzione è unica?* Il problema è lineare quindi l'unicità viene dimostrata per contraddizione. Infatti si supponga, per contraddizione,

che il problema (13) abbia due soluzioni diverse: $u^{(1)} \neq u^{(2)}$. Valgono allora i seguenti:

$$\begin{cases} u_t^{(1)} + cu_x^{(1)} = 0 \;\; x \in [0, L], \; t > 0 \\ u^{(1)}(x, 0) = u_0(x) \;\; x \in [0, L] \\ u^{(1)}(\cdot, t) = g(t) \; \forall t > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t^{(2)} + cu_x^{(2)} = 0 \;\; x \in [0, L], \; t > 0 \\ u^{(2)}(x, 0) = u_0(x) \;\; x \in [0, L] \\ u^{(2)}(\cdot, t) = g(t) \; \forall t > 0 \end{cases}$$

Facendo la differenza tra le equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} u_t^{(1)} - u_t^{(2)} + c(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}) = 0 \;\; x \in [0, L], \; t > 0 \\ u^{(1)}(x, 0) - u^{(2)}(x, 0) = u_0(x) - u_0(x) = 0 \;\; x \in [0, L] \\ u^{(1)}(\cdot, t) - u^{(2)}(\cdot, t) = g(t) - g(t) = 0 \;\; \forall t > 0 \end{cases}$$

Chiamando $w(x, t)$ la differenza tra $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$, si trova che $w(x, t)$ risolve il problema

$$\begin{cases} w_t + cw_x = 0 \;\; x \in [0, L], \; t > 0 \\ w(x, 0) = 0 \;\; x \in [0, L] \\ w(\cdot, t) = 0 \;\; \forall t > 0 \end{cases} \tag{14}$$

ossia un problema di trasporto con dati tutti nulli. Sapendo che il problema ammette almeno una soluzione e che questa ha valore pari al dato iniziale oppure alla condizione all'inflow in base a dove cade x_0 si deduce che $w(x, t) = 0 \Rightarrow u^{(1)} - u^{(2)} = 0 \Rightarrow u^{(1)}(x, t) = u^{(2)}(x, t)$ che rappresenta una contraddizione perché inizialmente era stato ipotizzato che le due soluzioni $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ fossero diverse. Quindi la soluzione è *unica*.

3. *Si ha la dipendenza continua dai dati?* (cioè: il problema è **stabile**?) Considerando per semplicità il problema omogeneo, e velocità c costante, immaginiamo di avere oltre alla soluzione u (con dati $u_0(x)$ e $g(t)$, rispettivamente per $t = 0$ e per x uguale all'estremo inflow) una soluzione $\tilde{u}$ con dati perturbati (rispettivamente $\tilde{u}_0(x)$ e $\tilde{g}(t)$ in modo tale che

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\|_\infty \leq |\varepsilon| \quad \text{e } \|g - \tilde{g}\|_\infty \leq |\varepsilon|$$

La differenza $w := u - \tilde{u}$ verificherà anch'essa l'equazione omogenea, e i suoi valori al bordo saranno sempre, in modulo, minori di $|\varepsilon|$. Ma i valori di w in un qualunque punto del dominio $(0, L) \times (0, +\infty)$, saranno, seguendo le caratteristiche, uguali al valore di w in qualche punto del segmento $(0, L)$ oppure in qualche punto del lato di inflow, e quindi, in ogni punto del dominio si avrà comunque

$$|w(x, t)| \leq |\varepsilon|.$$

Guardando le formule risolutive per i casi di equazioni non omogenee si vede facilmente che comunque il valore di w in un punto qualsiasi sarà uguale al valore di w al bordo, corretto con l'integrale di una funzione ($f - \tilde{f}$, in modulo minore di $|\varepsilon|$) su un intervallo di lunghezza limitata (dipendente da L e da $|c|$), e quindi si avrà ancora

$$|w(x,t)| \leq C(L, |c|)|\varepsilon|.$$

Esercizio:

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = 0 \text{ con } x \in [0, L] \text{ e } 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \cos x \text{ con } x \in [0, L] \\ u(0, t) = 1 \text{ con } 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Dalle precedenti conclusioni si ottiene:

$$\forall (x,t) \in [0, L]\text{x}[0, T]$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \cos(x - 3t) \text{ per } x_0 = x - 3t \in [0, L] \\ 1 \text{ per } x_0 = x - 3t \notin [0, L] \end{cases}$$

Ad esempio, per il punto $(x,t) = (1,4)$ la caratteristica è:
$x - 1 = 3(t - 4) \to x = 3t - 11$, e facendo l'intersezione con l'asse x si ha

$$\begin{cases} x = 3t - 11 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 < 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow u(1,4) = 1$$

Se $u(0,t)$ non fosse costante, si dovrebbe trovare il suo valore facendo l'intersezione con l'asse t.

$$\begin{cases} x = 3t - 11 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = \dfrac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow u(1,4) = g(11/3)$$

Invece per il punto $(4,1)$ la caratteristica è:
$x - 4 = 3(t - 1) \to x = 3t + 1$, e facendo l'intersezione con l'asse x si ha

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1 \in [0, L] \Rightarrow u(4,1) = \cos 1$$

Equazioni alla derivate parziali del secondo ordine

Ci occuperemo di equazioni differenziali del secondo ordine lineari e a coefficienti costanti. Indicando con x e y le variabili indipendenti, la scrittura generale è

$$\underbrace{au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}}_{\text{parte principale}} + \cdots\cdots = 0$$

dove a, b, c sono i coefficienti, e nella parte "$\cdots$" ci sono termini che coinvolgono derivate di u di ordine inferiore.
Queste equazioni sono di tre tipi: *ellittiche, paraboliche e iperboliche*. La classificazione viene fatta guardando il comportamento della parte principale nel modo seguente: convertendo (per esempio pensando di usare la trasformata di Fourier) le derivate in variabili elevate al grado della derivata, cioè

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \to x^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \to y^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \to xy,$$

si ottiene l'equazione di una conica (anche se degenere):

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

Il tipo di curva è dato dal discriminante:

- Se $b^2 - ac < 0$ si ha un'ellisse $\quad\to\quad$ equazione ellittica
- Se $b^2 - ac = 0$ si ha una parabola $\quad\to\quad$ equazione parabolica
- Se $b^2 - ac > 0$ si ha un'iperbole $\quad\to\quad$ equazione iperbolica

Una delle variabili indipendenti può essere il tempo t, nel qual caso la soluzione u dipende sia dallo spazio x che dal tempo: $u = u(x, t)$ e l'equazione si dice *evolutiva.* Nelle equazioni *stazionarie* invece non c'è dipendenza dal tempo e la soluzione sarà $u = u(x)$ (o $u = u(x, y)$ in 2 dimensioni, o $u = u(x, y, z)$ in 3 dimensioni).

Esempio 1: prototipo di equazione ellittica, problema di Poisson

$$-\triangle u = f$$

dove Δ è l'operatore di Laplace (o Laplaciano) dato da

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy}$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = -1, b = 0, c = -1$, il discriminante è -1, e dunque l'equazione di Laplace è ellittica e stazionaria. ($x^2 + y^2 = 0$ è l'equazione di un'ellisse degenere: un punto isolato).

Esempio 2: prototipo di equazione iperbolica, equazione delle onde

$$u_{tt} - u_{xx} = f$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = 1, b = 0, c = -1$, il discriminante è $+1$, e dunque l'equazione delle onde è iperbolica e ovviamente evolutiva. ($t^2 - x^2 = 0$ è l'equazione di un'iperbole degenere: due rette distinte).

Esempio 3: prototipo di equazione parabolica, equazione del calore

$$u_t - u_{xx} = f$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = -1, b = 0, c = 0$, il discriminante è 0, e dunque l'equazione del calore è parabolica e ovviamente evolutiva. ($x^2 = 0$ è l'equazione di una parabola degenere: una retta doppia).

N.B. Per gli studenti NON abituati alle coniche degeneri sarà sufficiente considerare delle coniche classiche nelle quali *la parte principale* è appunto data, rispettivamente, da $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ e x^2: ad esempio (sempre rispettivamente) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (cerchio unitario), $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (iperbole equilatera), e $x^2 - y = 0$ (parabola).

EQUAZIONE DELLE ONDE o di D'ALEMBERT

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0$$

Fu introdotta da D'Alembert (1746) per studiare la propagazione delle onde in una corda elastica infinita (una corda molto lunga con la dimensione della sezione molto piccola e trascurabile rispetto alla lunghezza). c è una costante fissata che ha le dimensioni di una velocità. Infatti, facendo un'analisi dimensionale si ha

$$[u_{tt}] : [u]\,[t]^{-2} \qquad [u_{xx}] : [u]\,[l]^{-2},$$

quindi, affinchè l'equazione abbia senso c deve avere le dimensioni di una velocità:

$$[c]^2 : [l]^2\,[t]^{-2}.$$

All'equazione appena scritta bisogna aggiungere due condizioni iniziali che assegnano ampiezza e velocità iniziali dell'onda (sulla x non ci sono limiti perché $x \in (-\infty, \infty)$). Quindi si considera il problema di Cauchy per l'equazione delle onde :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{15}$$

Sapendo che $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b) = (a+b)(a-b)$, si può usare questa espressione sull'equazione differenziale:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0. \tag{16}$$

Osserviamo che l'equazione (16) può anche essere scritta come

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{17}$$

e quindi ogni funzione v che risolve l'equazione di trasporto:

$$v_t - c v_x = 0 \tag{18}$$

risolverà anche l'equazione (16). Le linee caratteristiche di (18) sono:

$$\frac{dx}{dt} = -c \Rightarrow x = x(t) = -ct + x_0$$

in cui x_0 è il punto di intersezione con l'asse delle x. Quindi per avere la (18) basterà che $v(x,t)$ sia costante lungo le caratteristiche e pari al suo valore all'istante iniziale: $v(x,t) = \varphi(x_0) = \varphi(x + ct)$, dove φ è una funzione da trovare imponendo le altre condizioni.

In particolare abbiamo trovato che: per ogni funzione φ di una variabile, abbastanza regolare, la scelta $u := \varphi(x+ct)$ fornisce una soluzione della equazione delle onde (16) (cosa che peraltro, a posteriori, è anche facile da controllare).

Osserviamo però che l'equazione (16) può anche essere scritta come

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{19}$$

e quindi ogni funzione w che risolve l'equazione di trasporto:

$$w_t + cw_x = 0 \tag{20}$$

risolverà anche l'equazione (16). Le linee caratteristiche di (20) sono:

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow x = x(t) = ct + x_0$$

in cui x_0 è il punto di intersezione con l'asse delle x. Quindi per avere la (20) basterà che $w(x,t)$ sia costante lungo le caratteristiche $x = x_0 + ct$, e pari al suo valore all'istante iniziale: $w(x,t) = \psi(x_0) = \psi(x-ct)$, dove ψ è una funzione da trovare imponendo le altre condizioni.

In particolare abbiamo trovato che: per ogni funzione ψ di una variabile, abbastanza regolare, la scelta $u := \psi(x-ct)$ fornisce una soluzione della equazione delle onde (16).

Quindi possiamo cercare la soluzione del problema delle onde come sovrapposizione delle due onde $u(x,t) = \varphi(x+ct)$ e $u(x,t) = \psi(x-ct)$:

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \tag{21}$$

Per trovare φ e ψ sfruttiamo le condizioni iniziali:

1. $u(x,0) = u_0(x) \to \varphi(x) + \psi(x) = u_0(x)$
2. $u_t(x,0) = u_1(x) \to c\varphi'(x) + (-c)\psi'(x) = u_1(x)$,

ottenendo un sistema di due equazioni in due incognite (φ e ψ):

$$\begin{cases} \varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) \\ c[u_0'(x) - \psi'(x) - \psi'(x)] = u_1(x) \to c[u_0'(x) - 2\psi'(x)] = u_1(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) \\ \psi'(x) = \frac{1}{2}u_0'(x) - \frac{1}{2c}u_1(x) \end{cases}$$

Integrando tra x_0 e x la seconda equazione si ha

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \frac{1}{2}[u_0(x) - u_0(x_0)] - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(s)ds$$

da cui si ottiene

$$\psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(s)ds + k, \tag{22}$$

avendo posto $k = \psi(x_0) - \frac{1}{2}u_0(x_0)$ (che dipende solo da x_0). Dalla prima equazione si ricava la $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(s)ds - k. \tag{23}$$

Sostituendo nella (21) si deduce

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} u_1(s)ds - k + \frac{1}{2}u_0(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} u_1(s)ds + k \end{aligned}$$

Quindi la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione delle onde (15) è:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds}$$

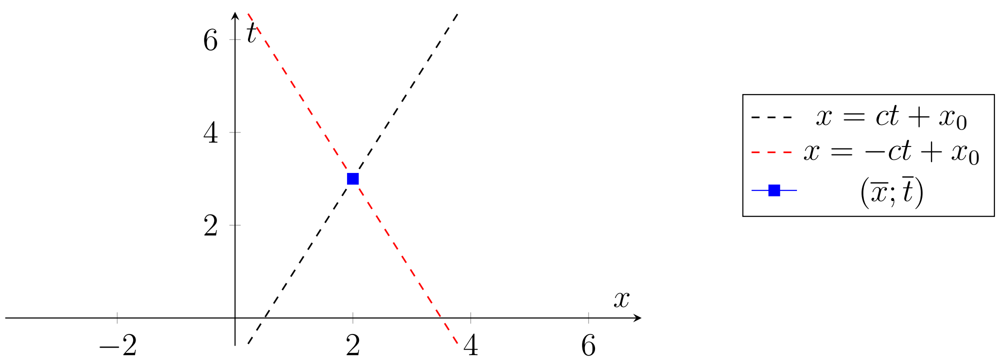
chiamata *FORMULA DI D'ALEMBERT.*

Se indichiamo con U_1 una qualunque primitiva di u_1 possiamo anche scrivere la formula precedente come

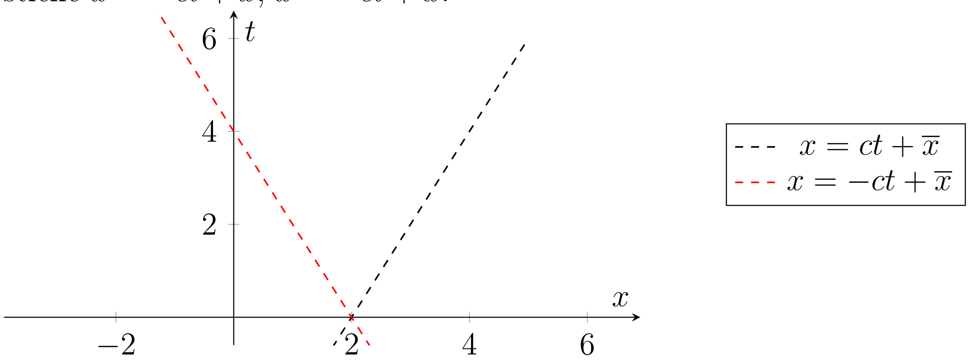
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2c}\Big[cu_0(x+ct) + cu_0(x-ct) + U_1(x+ct) - U_1(x-ct)\Big] \\ &= \frac{1}{2c}\Big[(cu_0 + U_1)(x+ct) + (cu_0 - U_1)(x-ct)\Big]. \end{aligned}$$

Dominio di dipendenza e dominio di influenza

Guardando la formula di D'Alembert, ci si accorge che la soluzione in un punto $(\overline{x}, \overline{t})$ dipende dai valori del dato u_0 nelle due intersezioni, con l'asse delle x, delle due caratteristiche passanti per $(\overline{x}, \overline{t})$, e dipende anche dai valori della velocità iniziale in tutto l'intervallo $[\overline{x}-c\overline{t}, \overline{x}+c\overline{t}]$. Il triangolo compreso tra le due caratteristiche appena disegnate e l'asse delle x è costituito da tutti i punti che rappresentano il **dominio di dipendenza**: in tutto l'insieme di quei punti, la soluzione $u(x,t)$ dipende dai valori di u_0 e di u_1 nell'intervallo $[\overline{x} - c\overline{t}, \overline{x} + c\overline{t}]$.



Se invece ci si mette in punto $\overline{x}$ sull'asse x da cui partono due caratteristiche $x = -ct + \overline{x}$, $x = -ct + \overline{x}$:



si vede che $u_0(\overline{x})$ e $u_1(\overline{x})$ influenzano i valori di $u(x,t)$ in tutto lo spazio compreso tra le due caratteristiche uscenti da $\overline{x}$; l'insieme di tutti quei punti viene chiamato **dominio di influenza**.

Una perturbazione in $\overline{x}$, come si propaga? Dopo quanto tempo la si avverte?
La perturbazione si propaga lungo le due caratteristiche con velocità c. Essa sarà avvertita nella posizione x^* dopo un tempo t^* dato da :

$$t^* = \frac{|x^* - \overline{x}|}{c}$$

da cui si evince che se c è grande, il tempo in cui si avverte la perturbazione è piccolo; viceversa se c è piccolo, il tempo in cui verrà avvertita la perturbazione sarà grande.

Soluzione Fondamentale della equazione delle onde

Studiamo ora il caso della cosiddetta *Soluzione Fondamentale*, che è definita come la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0 \\ u(x,0) = 0 \qquad \forall x \\ u_t(x,0) = \delta_0(x) \qquad \forall x \end{cases} \tag{24}$$

dove $\delta_0(x)$ rappresenta la massa di Dirac o impulso di Dirac centrato in 0. Il pedice della δ indica dove è applicata la massa.

Per gli studenti che non hanno familiarità con la delta di Dirac è opportuno aprire una parentesi con qualche breve richiamo.

Richiami sulla delta di Dirac

- **In Fisica**: $\delta_p(x)$ viene usata, ad esempio, per rappresentare la *densità* di un corpo puntiforme (oppure la *densità di carica* di una carica puntiforme, oppure la *pressione* di un carico concentrato, etc...) collocato nella posizione p.

  Poiché $\rho = \dfrac{m}{V}$ (massa diviso volume), al tendere a zero (attorno al punto p) del volume V su cui la massa è distribuita, la densità tenderà ad infinito. Considerando per semplicità il caso di una sola dimensione (e quindi considerando, in realtà, una *densità lineare*, ovvero una massa per unità di lunghezza), avremo le seguenti proprietà:

$$\int_a^b \delta_p(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in [a,b] \\ 0 & \text{se } p \notin [a,b] \end{cases}$$

e in generale

$$\int_a^b \delta_p(x)f(x)dx = \begin{cases} f(p) & \text{se } p \in [a,b] \\ 0 & \text{se } p \notin [a,b] \end{cases}$$

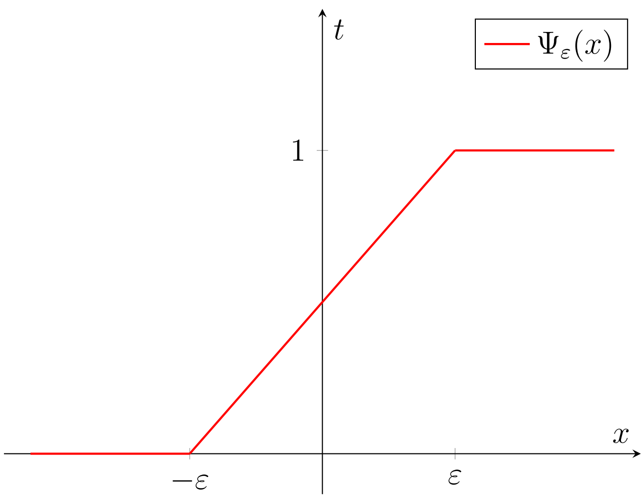
- **In Matematica** una delta di Dirac si può introdurre nel modo seguente. Per $\varepsilon > 0$ (destinato a tendere a zero) consideriamo la funzione $\Psi_\varepsilon(x)$ definita da (si veda la figura seguente)

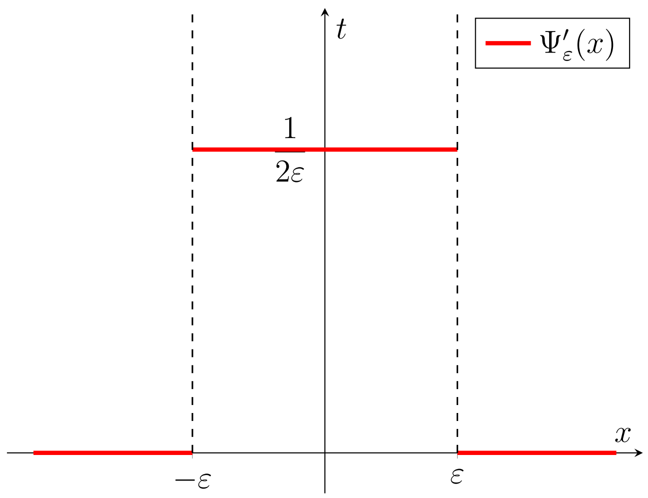
$$\Psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq -\varepsilon \\ \dfrac{x+\varepsilon}{2\varepsilon} & \text{per } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \text{per } x \geq \varepsilon \end{cases}$$

Passando al limite, puntualmente, per $\varepsilon \to 0$ si ha

- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Psi_\varepsilon(x) = H(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1/2 & \text{per } x = 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

in cui $H(x)$ è la funzione gradino (o di Heaviside).





La funzione $\Psi_\varepsilon(x)$ non è derivabile in $-\varepsilon$ e in ε ma si può derivare a tratti. Avremo:

- $\Psi'_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -\varepsilon \\ \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{per } -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 0 & \text{per } x > \varepsilon 0 \end{cases}$

e passando al limite per $\varepsilon \to 0$

- $\lim_{\varepsilon \to 0} \Psi'_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ +\infty & \text{per } x = 0 \end{cases}$

Quindi poniamo

- $\delta_0(x) = \text{“}H'(x)\text{''} = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ +\infty & \text{per } x = 0 \end{cases}$

(La funzione $H(x)$ non è derivabile in 0 quindi mettiamo la sua derivata tra virgolette).

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi'_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}dx = \frac{1}{2\varepsilon}(\varepsilon - (-\varepsilon)) = 1$

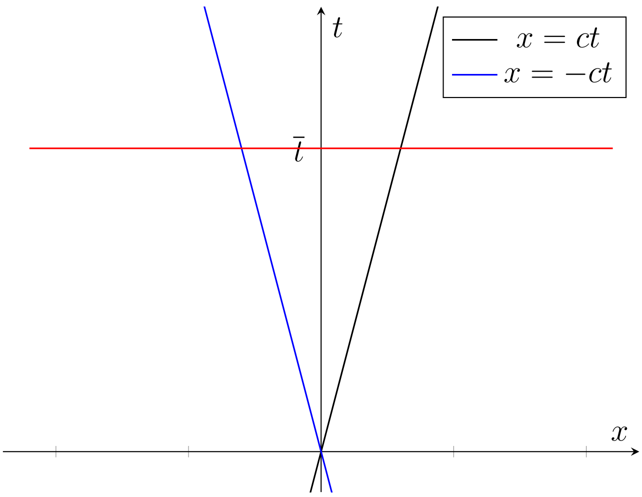
N.B. per $x < \varepsilon$ e per $x > \varepsilon$ la funzione $\Psi'_\varepsilon(x)$ è nulla quindi si considera solo il tratto compreso tra $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$. Più in generale

$$\int_a^b \delta_0(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \in (a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tornando al problema (24), la Formula di D'Alembert con i dati del problema considerato dà:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[0+0] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \delta_0(s)ds = \frac{1}{2c}[H(x+ct) - H(x-ct)]}$$

Disegnata sarebbe:



La soluzione vale $\frac{1}{2c}$ in tutti punti del piano compresi tra le due rette caratteristiche, ossia:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & -ct \leq x \leq ct \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{25}$$

Notiamo che, per ogni $\bar{t}$ fissato, l'area (nel piano (x,u)) dell'onda $u = u(x,\bar{t})$ data da (25) vale

$$Area = \int_{x-c\bar{t}}^{x+c\bar{t}} \frac{1}{2c}ds = \frac{1}{2c}(x + c\bar{t} - x + c\bar{t}) = \bar{t}$$

L'area dell'onda al tempo $\bar{t}$ è pari a $\bar{t}$, quindi cresce al crescere di $\bar{t}$, ma *non dipende dalla velocità c*. Quando c va all'infinito, cioè più alta è la velocità di propagazione, più u tenderà a 0. Se c tende 0, cioè più bassa è la velocità di propagazione, più u tenderà a ∞. Ma poiché l'area si mantiene costante, all'aumentare della velocità c il valore di u si abbassa e l'onda si allarga.

Analogamente se consideriamo, nello spazio tridimensionale (x, t, z) la funzione $z = u(x, t)$ dove u è data dalla soluzione (25) di (24), e fissiamo un $\bar{t} > 0$, nella striscia $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < \bar{t}$, troviamo un prisma di base triangolare (con vertici $(0, 0)$, $(-c\bar{t}, \bar{t})$ e $(c\bar{t}, \bar{t})$ e altezza $1/2c$ il cui volume vale $\bar{t}^2/2$, che, ancora, non dipende da c.

Riassumiamo quanto visto precedentemente per il problema (15). Abbiamo trovato l'espressione analitica della soluzione tramite la FORMULA DI D'ALEMBERT:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds$$

Questo ci permette di affermare che il problema considerato è ben posto. Infatti:

1. La soluzione esiste perché è stata ricavata una soluzione in forma analitica

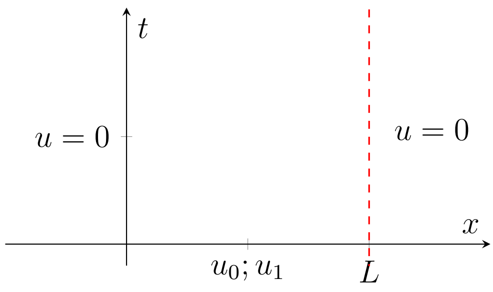
2. La soluzione è unica perché il problema è lineare e l'unicità si dimostra per contraddizione: si suppone che esistano due soluzioni $u^{(1)} \neq u^{(2)}$ che verificano lo stesso problema (cioè con gli stessi dati iniziali), si fa la differenza tra i due problemi e si vede che la funzione differenza $w(x, t) = u^{(1)} - u^{(2)}$ risolve il problema delle onde con dati iniziali pari a 0. Dalla formula di D'Alembert si ha quindi $w(x, t) = u^{(1)} - u^{(2)} = 0$ che rappresenta la contraddizione (esattamente lo stesso procedimento usato finora negli altri casi).

3. La dipendenza continua dai dati è ancora conseguenza della formula di D'alembert: la soluzione è una funzione continua dei dati e quindi dipende in modo continuo dai dati.

Equazione delle onde per una corda di lunghezza finita

(Problema ai limiti)

Passiamo ora a considerare un problema ai limiti, cioè un problema in cui la corda ha una lunghezza finita L, per cui la presenza della derivata seconda rispetto a x impone di avere una ulteriore condizione (che per semplicità, qui assumeremo essere rappresentata da $u = 0$) in ciascuno dei due estremi dell'intervallo $(0, L)$.



Il problema diventa:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in [0; L] \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in [0; L] \\ u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{cases} \tag{26}$$

Per mostrare l'esistenza della soluzione del problema (26) possiamo procedere combinando le strategie usate per l'equazione del trasporto su un dominio limitato e per l'equazione delle onde su tutto $\mathbb{R}$.

Osserviamo che, come abbiamo visto, nel caso della equazione delle onde, per ogni punto (x^*, t^*) passano *due* linee caratteristiche:

$$x - x^* = c(t - t^*) \qquad \text{e} \qquad x - x^* = -c(t - t^*) \tag{27}$$

(che nella Figura 4 appaiono di colore blu e verde, rispettivamente).

Osserviamo inoltre che, date $u_0(x)$ e $u_1(x)$ su $(0, L)$, procedendo come in (22) e (23), possiamo facilmente ricostruire, per $t = 0$, e per ogni $x_0 \in (0, L)$, le due funzioni φ e ψ che poi saranno costanti lungo le caratteristiche $x = x_0 + ct$ e $x = x_0 - ct$, rispettivamente.

Per ricostruire la u, nel caso più semplice di un punto (x^*, t^*) come nel disegno in basso a sinistra di Figura 4, conoscendo i valori su entrambe le due linee caratteristiche (verde e blu) per $t = 0$ abbiamo il loro valore anche nel punto (x^*, t^*) e quindi possiamo calcolare $u(x^*, t^*)$ come somma delle due (come in (21)). Negli altri tre casi della Figura 4, invece, una delle caratteristiche (o entrambe) incontrano una delle rette $x = 0$ oppure $x = L$. Ma possiamo osservare che, avendo posto $u = 0$ su tali linee, avremo che il valore lungo una delle due (φ o ψ) sarà opposto al valore sull'altra (visto che la somma, u, fa zero!). Quindi, se in un punto della $x = 0$ o della $x = L$ conosciamo uno dei due valori sapremo anche l'altro. Questo spiega

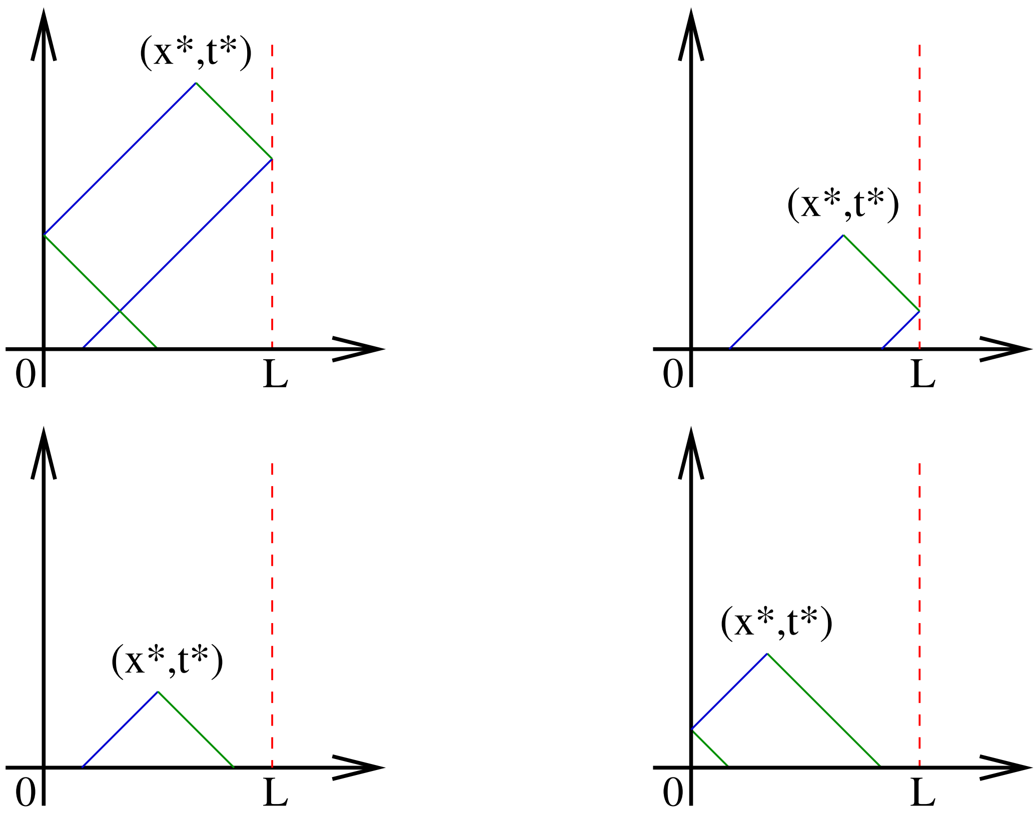


Figura 4: Caratteristiche: $\varphi(x+ct) = costante$, $\psi(x-ct) = costante$

perchè, nella Figura 4, le caratteristiche cambiano colore (da verde a blu o viceversa) quando incontrano uno dei due bordi. Ma in tutti i casi, per ogni punto (x^*, t^*), possiamo seguire le due caratteristiche di (27) passanti per tale punto, giù giù (eventualmente rimbalzando sui bordi laterali e cambiando colore) fino ad arrivare all'intervallo iniziale (guardate attentamente la figura per convincervi). E una volta giunti sull'intervallo iniziale il valore su di esse è noto.

Verifichiamo ora (per il caso del problema (26)), che la soluzione u dipende con continuità dai dati iniziali $u_0(x)$ e $u_1(x)$. Il risultato che otterremo permetterà di ricavare, al tempo stesso, l'unicità della soluzione e la "buona positura" del problema.

Stabilità

Si moltiplica l'equazione differenziale per u_t:

$$u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0$$

e si integra tra 0 ed L:

$$\int_0^L u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})dx = 0.$$

Ricordando che $u_t u_{tt} = \frac{1}{2}\frac{\partial (u_t)^2}{\partial t}$, si può scrivere:

$$\int_0^L \left(\frac{1}{2}\frac{\partial(u_t^2)}{\partial t} - c^2 u_t u_{xx}\right)dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L u_t^2(x,t)dx - c^2\int_0^L u_t(x,t)u_{xx}(x,t)dx = 0 \tag{28}$$

Concentrandosi solo sul secondo integrale e svolgendolo per parti si ottiene:

$$\int_0^L u_t(x,t)\,u_{xx}(x,t)dx = -\int_0^L u_{tx}(x,t)\,u_x(x,t)dx + \Big[u_t(x,t)\,u_x(x,t)\Big]_{x=0}^{x=L}$$

Notiamo ora che, essendo $u(0,t) = u(L,t) = 0$ per ogni t, si avrà anche che $u_t(0,t) = u_t(L,t) = 0$ e quindi il termine tra parentesi quadra nell'ultima equazione è uguale a zero (sempre per ogni t). Ricordando ora che

$$u_x(x,t)\,u_{xt}(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial(u_x)^2}{\partial t},$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_0^L ((u_t(x,t))^2 + c^2(u_x(x,t))^2)dx}_{} = 0$$

Il risultato dell'integrale in dx di oggetti che sono funzione di x e di t sarà una funzione solo di t. Tale funzione è chiamata con $E(t)$ e (a meno del fattore ρ, che rappresenta la densità lineare della corda, che abbiamo supposto costante e semplificato dalla equazione) rappresenta un'energia, data da:

$$E(t) := \int_0^L ((u_t(x,t))^2 + c^2(u_x(x,t))^2)dx.$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(E(t)) = 0 \Rightarrow E'(t) = 0 \Rightarrow E(t) = costante = E(0),$$

cioè l'energia iniziale del sistema si conserva. Da qui deriva la denominazione di *equazioni conservative* con cui vengono denotate le equazioni di questo tipo. Se i dati iniziali sono limitati, l'energia sarà limitata e per ogni istante t essa sarà uguale all'energia iniziale. Si ha quindi **la stabilità**:

$$\int_0^L [u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)]dx = E(t) = E(0) = \int_0^L [(u_1(x))^2 + c^2(u_0'(x))^2]dx$$

In particolare vediamo che, se i dati iniziali $u_0(x)$ e $u_1(x)$ sono entrambi nulli, l'energia iniziale (cioè al tempo zero) sarà nulla, e tale sarà anche l'energia per ogni tempo t. Questo dimostra immediatamente anche **l'unicità** della soluzione. Infatti, per linearità, se avessimo due soluzioni $u^{(1)}(x,t)$ e $u^{(2)}(x,t)$ con gli stessi dati, la differenza w risolverebbe un problema con dati uguali a zero, e l'energia associata a w sarebbe nulla per ogni tempo t:

$$E_w(t) = \int_0^L [w_t^2 + c^2 w_x^2]dx = E_w(0) = 0.$$

Ma l'energia è l'integrale di una somma di quadrati, e quindi sarà nulla se e solo se entrambi i termini w_t e w_x sono identicamente nulli, che (tenendo conto dei dati iniziali e al contorno) ci dice che la w stessa è identicamente uguale a zero. Quindi $u^{(1)} = u^{(2)}$ e l'unicità è dimostrata.

Esercizio:

$$(P)\begin{cases} u_{tt} - 36u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \cos(\pi x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Trovare la soluzione: $u = u(x,t) = ?$

Sapendo che: $u_0(x) = \sin(\pi x)$, $u_1(x) = \cos(\pi x)$, $c^2 = 36$ e usando la formula di d'Alembert si ottiene:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds$$

in cui:

$$\begin{aligned} &u_0(x+ct) = \sin(\pi(x+6t)) \\ &u_0(x-ct) = \sin(\pi(x-6t)) \\ &u_1(s) = \cos(\pi s) \to \int \cos(\pi s)ds = \frac{1}{\pi}\sin(\pi s) + costante \end{aligned}$$

Da cui segue:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\sin(\pi(x+6t)) + \sin(\pi(x-6t))] + \frac{1}{12}\int_{x-6t}^{x+6t} \cos(\pi s)ds = \\ &= \frac{1}{2}[\sin(\pi(x+6t)) + \sin(\pi(x-6t))] + \frac{1}{12\pi}(\sin[\pi(x+6t)] - \sin[\pi(x-6t)]) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12\pi}\right)\sin[\pi(x+6t)] + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12\pi}\right)\sin[\pi(x-6t)] \end{aligned}$$

Verifica:

- $u(x,0) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{12\pi}) \sin[\pi(x)] + (\frac{1}{2} - \frac{1}{12\pi}) \sin[\pi(x)] = \sin(\pi x)$
- $u_t = (\frac{1}{2} + \frac{1}{12\pi})(6\pi) \cos[\pi(x + 6t)] + (\frac{1}{2} - \frac{1}{12\pi})(-6\pi) \cos[\pi(x - 6t)]$

  da cui:

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= (\frac{1}{2} + \frac{1}{12\pi})(6\pi) \cos(\pi x) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{12\pi})(-6\pi) \cos(\pi x) = \\ &= \frac{1}{2} \cos(\pi x) + \frac{1}{2} \cos(\pi x) = \cos(\pi x) \end{aligned}$$

Quindi le condizioni iniziali sono verificate. Resta da controllare che la soluzione trovata verifichi l'equazione differenziale. Questo è lasciato come esercizio a casa.

Estensione a più dimensioni

Prima di estendere il problema delle onde in più dimensioni spaziali ricordiamo alcune definizioni e proprietà utili per il seguito.

• Operatore di Laplace (o Laplaciano): $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ in $2D$
(somma delle derivate parziali seconde rispetto alle 2 variabili indipendenti. In 3 dimensioni spaziali sarebbe $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ma qui considereremo solo problemi in 2 dimensioni spaziali).

• Gradiente: indicato con ∇ (si legge *nabla*), è un operatore differenziale che si applica ad una funzione, cioè ad una variabile scalare, e restituisce come risultato un vettore:

$$u = u(x,y) \;\rightarrow\; \nabla u(x,y) = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big)$$

• Divergenza: è un operatore differenziale che si applica ad un vettore e restituisce uno scalare come risultato:

$$\underline{V} = (V_1, V_2) \Rightarrow div\underline{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

Se: $\underline{V} = (u_x,\, u_y) = \underline{\nabla} u$ segue che:

$$div(\underline{\nabla} u) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u$$

Teorema della divergenza di Gauss: dato un vettore $\underline{V}$ definito in un dominio D, si ha:

$$\int_D div\underline{V}dxdy = \int_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n}ds \tag{29}$$

in cui $\underline{n} = (n_x, n_y)$ è il versore della normale uscente dal bordo.

Formula di Gauss-Green: è un estensione (in pratica, un corollario) del Teorema della divergenza di Gauss. Dati un vettore $\underline{V}$, e una funzione φ, entrambi differenziabili, si ha:

$$\int_D div\underline{V}\,\varphi\,dxdy = -\int_D \underline{V} \cdot \underline{\nabla}\varphi\,dxdy + \int_{\partial D} \varphi\underline{V} \cdot \underline{n}\,ds \tag{30}$$

Dimostrazione Applicando il teorema della divergenza di Gauss al vettore $\underline{V}\,\varphi$ si ha

$$\int_D div(\underline{V}\,\varphi)dxdy = \int_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n}\,\varphi ds.$$

D'altra parte, sviluppando $div(\underline{V}\,\varphi)$ si ha

$$div(\underline{V}\,\varphi) = (div\underline{V})\,\varphi + \underline{V} \cdot \underline{\nabla}\varphi$$

che sostituito nell'integrale a sinistra porta a (30). $\diamondsuit$

Esercizio La formula di Gauss-Green è una integrazione per parti: date due funzioni u e φ, poniamo $\underline{V} = (u, 0)$. Abbiamo, usando (30),

$$\int_D u_x\varphi\,dxdy = \int_D div\underline{V}\,\varphi\,dxdy = -\int_D \underline{V} \cdot \underline{\nabla}\varphi\,dxdy + \int_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n}\varphi\,ds$$
$$= -\int_D u\varphi_x\,dxdy + \int_{\partial D} u\cos(nx)\varphi\,ds$$

e analogamente ponendo $\underline{V} = (0, v)$ avremmo

$$\int_D v_y\varphi dxdy = -\int_D v\varphi_y dxdy + \int_{\partial D} v\cos(ny)\varphi ds.$$

Reciprocamente, usando la formula di integrazione per parti (e percorrendo le uguaglianze in senso inverso) dimostreremmo la formula di Gauss-Green con $\underline{V} = (u, v)$

$$\int_D div\underline{V}\,\varphi dxdy = \int_D (\frac{\partial V_1}{\partial x}\varphi + \frac{\partial V_2}{\partial y}\varphi)dxdy \text{ (si integra per parti)}$$
$$= -\int_D V_1\varphi_x dxdy + \int_{\partial D} V_1\varphi\cos(nx)ds - \int_D V_2\varphi_y dxdy + \int_{\partial D} V_2\varphi\cos(ny)ds$$
$$= -\int_D (V_1\varphi_x + V_2\varphi_y)dxdy + \int_{\partial D}(V_1\cos(nx) + V_2\cos(ny))\varphi ds$$
$$= -\int_D \underline{V}\cdot\underline{\nabla}\varphi\, dxdy + \int_{\partial D}\varphi\underline{V}\cdot\underline{n}ds$$

e otteniamo (30). ♢

Usando la formula di Gauss-Green si ottiene, in particolare,

$$\int_D \Delta u\, vdxdy = \int_D div(\underline{\nabla}u)\, vdxdy = -\int_D \underline{\nabla}u\cdot\underline{\nabla}vdxdy + \int_{\partial D} v\underline{\nabla}u\cdot\underline{n}ds$$

cioè:
$$\boxed{\int_D (\Delta u\, v + \underline{\nabla}u\cdot\underline{\nabla}v)dxdy = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}ds} \qquad (GG)$$

avendo usato, nell'ultimo passaggio

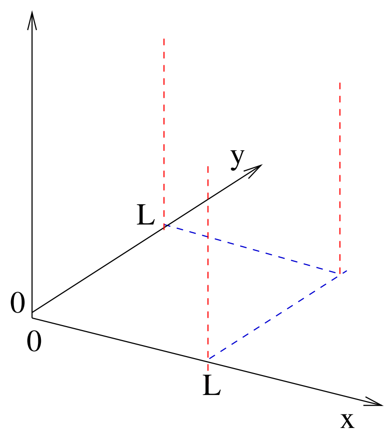
$$\underline{\nabla}u\cdot\underline{n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny) = u_x n_x + u_y n_y = \frac{\partial u}{\partial n}$$

Estensione dell'equazione delle onde ad un campo bidimensionale

Sia Q il quadrato
$$Q = [0; L]\times[0; L]$$
Si cerca una funzione $u = u(x, y, t)$ soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 \qquad (x, y)\in Q \qquad t > 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \qquad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y) \qquad \forall x, y\in Q \\ u(\cdot, t) = 0 \qquad \text{su } \Gamma = \partial Q, \quad \forall t \end{cases} \tag{31}$$

in cui $\Gamma = \partial Q$ rappresenta il bordo del quadrato Q.
N.B. Come nel caso di una sola dimensione spaziale, anche qui per avere l'unicità della soluzione dell'equazione differenziale si ha bisogno di condizioni



iniziali e di condizioni ai limiti.

Questo problema studia le vibrazioni in una membrana elastica che in questo caso è rappresentata dal quadrato Q. Adesso dovremmo studiare se il problema è ben posto, cioè studiare l'esistenza, l'unicità e la stabilità della soluzione. Dimostrare l'esistenza di una soluzione, però, non è facile: in casi semplici si può dedurre l'espressione analitica della soluzione per separazione di variabili, dimostrando così costruttivamente l'esistenza di una soluzione, ma in generale la dimostrazione della esistenza richiede strumenti matematici abbastanza raffinati. Qui ci limitiamo ad assumere che (31) abbia soluzioni, e a studiare la **stabilità** (da cui si determinerà anche l'unicità, come nel caso di una sola dimensione spaziale).

Stabilità

Si moltiplica l'equazione differenziale per u_t:

$$u_t(u_{tt} - c^2 \Delta u) = 0,$$

e, per ogni t, si integra rispetto a x e a y su tutto Q:

$$\int_Q u_t(u_{tt} - c^2 \Delta u) dxdy = 0$$

da cui:

$$\int_Q u_t \cdot u_{tt} \, dxdy - c^2 \int_Q u_t \, \Delta u \, dxdy = 0 \tag{32}$$

Si ha che:

1. $u_t u_{tt} = \frac{1}{2}\frac{\partial(u_t^2)}{\partial t} = 2u_t \frac{\partial u_t}{\partial t}\frac{1}{2}$

2. per trattare il secondo integrale di (32) bisogna integrare per parti; cioè, in più dimensioni, bisogna usare le formule di *Gauss-Green* (30):

$$\int_Q u_t \Delta u \, dxdy = -\int_Q \underline{\nabla} u_t \cdot \underline{\nabla} u \, dxdy + \int_{\partial Q} u_t \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} \, ds$$

dove l'ultimo integrale è nullo poichè su ∂Q si ha $u = 0$ per ogni t e quindi anche $u_t = 0$ per ogni t. Adesso ritornando a (32) si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_Q (u_t)^2 dxdy + c^2 \int_Q \underline{\nabla} u_t \cdot \underline{\nabla} u \, dxdy = 0 \tag{33}$$

Sapendo che $\nabla u_t \cdot \nabla u = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\underline{\nabla} u|^2$ e sostituendo in (33) si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_Q u_t^2 + c^2|\underline{\nabla} u|^2 \, dxdy = 0 \tag{34}$$

Come nel caso monodimensionale, chiamiamo l'integrale in(34) con $E(t)$ (perché dipende solo da t). Si avrà:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}E(t) = 0 \quad \Rightarrow E'(t) = 0 \quad \Rightarrow E(t) = cost$$

uguale al valore per $t = 0$ che noi già conosciamo:

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_Q \left[u_t^2 + c^2|\underline{\nabla} u|^2 \right] dxdy = \\ &= \int_Q \left[(u_t(x,y,0))^2 + c^2|\underline{\nabla} u(x,y,0)|^2 \right] dxdy = \\ &= \int_Q \left[u_1^2(x,y) + c^2|\underline{\nabla} u_0^2(x,y)| \right] dxdy \quad \forall t. \end{aligned}$$

Ciò equivale a dire che si ha la dipendenza continua dai dati della soluzione, cioè la cosiddetta **stabilità**.

Vediamo ora come, in particolare, dai conti precedenti segua anche la **unicità** della soluzione di (31).

Infatti, come nei casi precedenti, se $u^{(1)}(x,y,t)$ e $u^{(2)}(x,y,t)$ sono due soluzioni di (31) con gli stessi dati iniziali, per linearità avremo che la loro differenza $w := u^{(1)} - u^{(2)}$ risolve il problema (31) con dati iniziali entrambi nulli.

Sapendo che il problema è stabile, cioè l'energia associata a w si mantiene costante, si può scrivere:

$$E_w(t) = E_w(0) = \int_Q [\frac{dw}{dt}[w(x,y,0)^2] + c^2|\underline{\nabla} w(x,y,0)|^2]\, dxdy = 0$$

(essendo i dati iniziali di w entrambi nulli). Ne consegue che

$$\int_Q [w_t^2 + c^2|\underline{\nabla} w|^2]\, dxdy = 0 \quad \forall t$$

Perché l'integrale sia nullo, bisogna che siano nulli gli integrandi:

$$\begin{cases} w_t(x,y,t) = 0 \quad \forall(x,y,t) \\ \underline{\nabla} w(x,y,t) = 0 \quad \forall(x,y,t) \end{cases}$$

da cui segue banalmente che w ha tutte e tre le derivate nulle e quindi è costante in tutto il prisma $Q \times [0, +\infty)$. Ma w è nulla sul bordo, e quindi è zero dappertutto. Ne consegue che $u^{(1)}(x,y,t) \equiv u^{(2)}(x,y,t)$ e l'unicità è dimostrata.