Formulazioni variazionali di problemi ellittici

Premessa

La trattazione matematicamente corretta della formulazione variazionale di problemi ai limiti per equazioni a derivate parziali richiederebbe strumenti teorici abbastanza complessi, che escono largamente dagli scopi di questo corso.

Ci accontenteremo pertanto, in un certo numero di punti, di una presentazione necessariamente vaga, con parecchie *trasgressioni* qua e là. Naturalmente, in questi punti, non verrà pretesa nessuna conoscenza rigorosa da parte degli alunni (che possono tranquillizzarsi). Spesso, in questi casi, aggiungeremo delle brevi osservazioni per segnalare, a grosse spanne, il motivo per cui siamo di fronte ad una trasgressione.

In ogni caso sarà opportuno cominciare con qualche breve richiamo su nozioni di algebra lineare. Tutto, o quasi tutto, dovrebbe già essere stato visto nei corsi della Laurea triennale, ma qualche richiamo per rinfrescare le idee e fissare le notazioni non farà certo male

Richiami di Algebra Lineare

Spazi vettoriali lineari su $\mathbb{R}$

Uno *spazio vettoriale lineare su* $\mathbb{R}$ è un insieme V nel quale sono definite due operazioni: una *somma*, e un *prodotto per uno scalare*.

Alla **somma** (una operazione che ad ogni coppia di elementi di V associa un terzo elemento di V, e sarà indicata col solito segno "+") si richiedono le proprietà

- la somma è commutativa ($u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$) e associativa ($(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$).
- esiste in V un elemento (che indichiamo naturalmente con "0") tale che $0 + v = v \quad \forall v \in V$
- per ogni $v \in V$ esiste in V il suo opposto (che indichiamo con "$-v$") cioè un elemento di V tale che $v + (-v) = 0$

Il **prodotto per uno scalare** è una applicazione che ad ogni coppia (α, v) con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ associa un altro elemento di V (di solito indicato con αv). Si richiede che

- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, \forall v \in V$

- $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v, w \in V$
- $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta) v \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall v \in V$
- $1\, v = v \quad \forall v \in V$

In questo corso non tratteremo spazi vettoriali lineari nei quali l'insieme degli scalari non sia uguale a $\mathbb{R}$. Quindi possiamo permetterci di parlare semplicemente di *spazi vettoriali lineari* (senza specificare *su* $\mathbb{R}$). A volte anche il termine *lineare* sarà sottinteso, quando questo non pregiudica la chiarezza..

Gli spazi $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, e in generale $\mathbb{R}^n$ sono tutti esempi di spazi vettoriali. Dato un intevallo $[a, b]$ l'insieme $C^0([a, b])$ delle funzioni continue da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ è anch'esso uno spazio vettoriale. Etc.

Applicazioni lineari e bilineari; funzionali

Sia V uno spazio vettoriale. Una applicazione ℓ da V in $\mathbb{R}$ è detta essere *lineare* se

$$\forall\, u,\ v \in V\ \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ si ha } \ell(\alpha u + \beta v) = \alpha \ell(u) + \beta \ell(v). \tag{1}$$

Spesso, trattando gli spazi vettoriali che intervengono nello studio delle equazioni a derivate parziali, (spazi che quasi sempre sono *spazi di funzioni*) le applicazioni da tali spazi in $\mathbb{R}$ vengono chiamate *funzionali*, e se sono lineari si parla di *funzionali lineari*.

Una applicazione a da $V \times V$ in $\mathbb{R}$ è detta essere *bilineare* se

$$\begin{aligned} &\forall\, u,\ v,\ w \in V\ \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ si ha } a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \\ &\forall\, u,\ v,\ w \in V\ \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ si ha } (u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w) \end{aligned} \tag{2}$$

(cioè, in pratica, se è lineare in ciascuno dei suoi due argomenti).

Spazi vettoriali normati

Sia V uno spazio vettoriale. Una **norma** su V è una applicazione $V \to \mathbb{R}^+$ (indicata con $\|\cdot\|_V$) che ha le seguenti proprietà:

- $\|v\|_V \geq 0 \qquad \|v\|_V = 0 \iff v = 0 \quad \forall v \in V$
- $\|\alpha v\|_V = |\alpha|\, \|v\|_V \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$
- $\|v_1 + v_2\|_V \leq \|v_1\|_V + \|v_2\|_V \quad \forall v_1, v_2 \in V$

Esempi
In $\mathbb{R}^n$ l'applicazione

$$\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2} \tag{3}$$

è una norma, come pure ciascuna delle applicazioni

$$\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \tag{4}$$

per ogni p con $1 \leq p < +\infty$, è una norma; inoltre è una norma anche la

$$\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i=1,..,n} |x_i|, \tag{5}$$

(che, come si può dimostrare, è il limite per $p \to +\infty$ delle precedenti). Infine, nello spazio $C^0([a,b])$ sono norme le

$$f \to \|f\|_p := \Big(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \tag{6}$$

per ogni p con $1 \leq p < +\infty$, ed è una norma anche la

$$f \to \|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{7}$$

Continuità di funzionali lineari e forme bilineari; norme duali

Sia V uno spazio vettoriale normato, e sia ℓ un funzionale lineare su V. Diciamo che ℓ è continuo da V in $\mathbb{R}$ se

$$\exists M \text{ tale che } \ |\ell(v)| \leq M\|v\|_V \quad \forall v \in V. \tag{8}$$

Potrebbe essere interessante notare che, sfruttando la linearità di ℓ (che implica, in particolare, che $\ell(0) = 0$), si vede subito che la (8) implica direttamente che ℓ è continuo in 0 nel vecchio senso della continuità della Analisi:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \|v - 0\|_V < \delta \Rightarrow |\ell(v) - \ell(0)| < \varepsilon$$

(basterà prendere $\delta = \varepsilon/M$). Poi, con facili passaggi si potrebbe sfruttare ancora la linearità di ℓ per mostrare che (8) implica la "continuità nel vecchio senso" anche in ogni $u_0 \in V$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall w \in V: \ \|w - u_0\|_V < \delta \Rightarrow |\ell(w) - \ell(u_0)| < \varepsilon$$

(infatti ponendo $v := w - u_0$ ci si riconduce al caso precedente).

Usando la (8) si può facilmente definire *la norma di un funzionale lineare e continuo* come

$$\|\ell\| := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_V}. \tag{9}$$

In altri termini potremmo dire che "la norma di ℓ è uguale alla più piccola costante M che rende vera la (8)", ma non vorremmo andare nel difficile...

Lo spazio dei funzionali lineari e continui su uno spazio vettoriale normato V può essere fornito in modo ovvio della definizione di *somma di funzionali* e di quelle di *prodotto di un funzionale per uno scalare* $\in \mathbb{R}$, che lo rendono esso stesso un spazio vettoriale chiamato spazio duale di V e indicato con V'. La norma introdotta in (9) viene detta *norma duale* e indicata con $\|\ell\|_{V'}$. Quindi, riassumendo:

$$\|\ell\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_V}. \tag{10}$$

Dato uno spazio vettoriale normato V e una forma a bilineare su V, diciamo che a *è continua* se

$$\exists M \text{ tale che } \; |a(u,v)| \le M \, \|u\|_V \, \|v\|_V \qquad \forall \, u, v \in V. \tag{11}$$

In analogia con quanto fatto in (9) possiamo anche definire

$$\|a\| := \sup_{u,\, v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|_V \, \|v\|_V}. \tag{12}$$

che però non useremo molto spesso.

Introduzione alle formulazioni variazionali

Generalità

Poichè una parte ellittica è sempre presente nei problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (siano essi ellittici, parabolici o iperbolici), ci occuperemo ora di problemi ellittici, e introdurremo la loro formulazione variazione (detta anche *debole*).

Il tipico esempio di operatore alle derivate parziali di tipo ellittico è costituito dal Laplaciano Δ, e l'equazione corrispondente sarà del tipo: data f trovare u tale che $\Delta u = f$ in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Condizioni ai limiti

All'equazione differenziale vanno aggiunte condizioni ai limiti sul bordo di Ω (cioè su $\Gamma = \partial\Omega$). Tipicamente, data una funzione g, definita su Γ, possiamo avere:

- $u = g$ su Γ, detta *Condizione ai limiti di Dirichlet* (omogenea se $g = 0$), in cui si assegna il valore che u deve avere su Γ.
- $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ su Γ, detta *Condizione ai limiti di Neumann* (omogenea se $g = 0$) in cui si assegna la derivata normale uscente che u deve avere su Γ (che, in molte applicazioni, avrà il significato di "assegnare il flusso uscente": $\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g$)

Ma spesso la frontiera Γ viene suddivisa in due parti: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ con $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ (in realtà l'intersezione sarà costituita da punti isolati: i bordi delle due zone) e si assegnano due funzioni g_D e g_N richiedendo che

- $u = g_D$ su Γ_D, e $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g_N$ su Γ_N *Condizioni ai limiti miste Dirichlet/Neumann* (omogenee se $g_D = 0$ e $g_N = 0$).

Ecco quindi alcuni esempi di problemi ai limiti in cui si considerano, per semplicità, Condizioni ai Limiti omogenee.

$$(ES1) \begin{cases} -\Delta u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & su \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

$$(ES2) \begin{cases} -\Delta u + u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & su \quad \Gamma \end{cases}$$

$$(ES3) \begin{cases} -\Delta u + u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & su \quad \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & su \quad \Gamma_N \end{cases}$$

$$(ES4) \begin{cases} -div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u) + \gamma(\underline{x})u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & su \quad \Gamma_D \\ k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 & su \quad \Gamma_N \end{cases}$$

A partire dai problemi differenziali in *forma forte* (come quelli scritti qui sopra) deduciamo ora la *formulazione variazionale* (o *formulazione debole*) che sarà il punto di partenza per l'approssimazione numerica.

Condizioni Naturali e condizioni Forzate

Come vedremo, la formulazione variazionale (un derivato moderno del vecchio "principio dei lavori virtuali") consiste nel costruire due spazi V_{trial} e V_{test} (che molto spesso coincidono) e due applicazioni:

- $a : V_{trial} \times V_{test} \to \mathbb{R}$, che nei nostri esempi sarà sempre *bilineare* e **non contiene** le informazioni sui *termini noti* f, g
- $\ell : V_{test} \to \mathbb{R}$, che nei nostri esempi sarà sempre *lineare*, e **contiene** le informazioni sui termini noti.

La formulazione variazionale che vogliamo costruire avrà poi una forma del tipo

$$(\mathbf{FV}) \quad \text{trovare } u \in V_{trial} \text{ tale che } a(u,v) = \ell(v) \text{ per ogni } v \in V_{test} \tag{13}$$

Nota: *trial* sta per "tentativo" e V_{trial} è appunto lo spazio nel quale cerchiamo (e *tentiamo* di trovare!) la soluzione u. Invece *test* sta per "esperimento", e V_{test} è lo spazio in cui si prendono le funzioni che usiamo per "saggiare" (o *testare*) se u è davvero la soluzione o no.

Le condizioni ai limiti per problemi ellittici vengono spesso suddivise in **condizioni naturali** e **condizioni forzate**. Le condizioni naturali (omogenee o non omogenee) non vengono introdotte negli spazi V_{trial} e V_{test}, ma solo nella applicazione $\ell(v)$, e dovranno uscir fuori in modo "naturale" dalla **FV**. Al contrario, le condizioni forzate devono essere introdotte nella definizione degli spazi, in generale sia in V_{trial} che in V_{test}, e, sempre in generale, non appaiono nè nella $a(u,v)$ nè nella $\ell(v)$. In particolare, nei nostri esempi $(ES1)--(ES4)$ le condizioni di Dirichlet (cioè su u) saranno sempre *forzate*, e quelle di Neumann (cioè su $\partial u/\partial n$) saranno sempre *naturali*.

Ma vediamo subito degli esempi che ci aiuteranno a chiarire la differenza, e a costruire la formulazione variazionale.

Formulazione variazionale del Problema ES1

Il procedimento (come vedremo) è sempre il seguente: si moltiplica l'equazione differenziale per una funzione test (che sceglieremo poi opportunamente) e si integra sul dominio Ω:

$$\int_\Omega -\Delta u \, v = \int_\Omega f v \quad \forall v \text{ (funzione test "regolare")}$$

Poi si integra per parti il termine a sinistra usando le formule di Gauss-Green:

$$\int_\Omega -\Delta u\, v = \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \qquad \text{sempre } \forall v \text{ “regolare”.}$$

La condizione ai limiti $u|_{\partial\Omega} = 0$ non dà alcuna informazione su $\dfrac{\partial u}{\partial n}$, e va imposta forzatamente. Inoltre è possibile annullare il fastidioso integrale di bordo scegliendo funzioni test che siano nulle sul bordo, cioè $v = 0$ su $\partial\Omega$, come la soluzione che cerchiamo. Quindi le condizioni $u = 0$ e $v = 0$ vengono imposte in modo “forzato” nella definizione sia dello spazio V_{trial} (dove cerchiamo la u) sia dello spazio V_{test} dove facciamo variare le v (e in questo esempio i due spazi saranno uguali). Si ottiene:

$$(PV)_1 \begin{cases} \text{trovare } u \text{ “regolare” con } u = 0 \text{ su } \partial\Omega \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \text{ “regolare” con } v = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

Il problema variazione (PV) va completato specificando cosa si intende per u e v “regolari”. Notiamo fin d'ora che, se avessimo avuto una condizione di Dirichlet *non omogenea* (cioè $u = g$ su Γ, con $g \neq 0$), la condizione $u = g$ avrebbe dovuto essere imposta nella scelta dello spazio V_{trial} in cui cercare la u e i due spazi V_{trial} e V_{test} sarebbero stati diversi: le funzioni di V_{trial} avendo valore al bordo uguale a g, e la funzioni di V_{test} avendo valore al bordo uguale a zero.

Cosa serve come regolarità? *Grosso modo* serve che la soluzione u, le funzioni test v, e il dato f siano tali che i due integrali siano finiti. Serve quindi che il prodotto fv sia integrabile, e che pure il prodotto $\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$ sia integrabile.

Ma per entrare un po' più nei dettagli servirà aprire una parentesi, e fare qualche richiamo di Analisi Funzionale.

Richiami di Analisi Funzionale

Spazi pre-Hilbertiani

Uno *spazio pre-Hilbertiano* è uno spazio vettoriale in cui è definita una applicazione **bilineare** $V \times V \to \mathbb{R}$, detta **prodotto scalare** e indicato con $(\cdot,\cdot)_V$, con le seguenti proprietà:

- simmetria: $\forall v, w \in V \qquad (v,w)_V = (w,v)_V$
- coercività: $(v,v)_V \geq 0 \quad \forall\, v \in V$ e $(v,v)_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Attenzione: Non bisogna confondere

- il *prodotto per uno scalare* in cui un vettore (ad esempio $(2,3)$), moltiplicato per uno scalare (ad esempio 7) dà come risultato un vettore (nel nostro esempio: $(14,21)$)

- e il *prodotto scalare* in cui due vettori (ad esempio $(1,2)$ e $(-1,2)$) vengono moltiplicati scalarmente tra loro, producendo un numero (nel nostro caso, per il prodotto scalare euclideo, $-1+4=3$).

Ogni spazio pre-Hilbertiano diventa subito uno spazio normato, definendo

$$\|v\|_V := \Big((v,v)_V\Big)^{1/2} \tag{15}$$

ma **non** è vero il viceversa. In generale, data una norma su uno spazio vettoriale V non esiste nessun prodotto scalare che renda vera la (15). In effetti, quando una norma deriva da un prodotto scalare come in (15) si ha, per ogni coppia di vettori u e v

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \tag{16}$$

(perché i doppi prodotti si elidono). Ma non tutte le norme (anzi, solo poche) verificano la (16). Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$, prendendo $\mathbf{x}=(0,1)$ e $\mathbf{y}=(1,0)$ si ha (con facili calcoli)

$$\|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{y}\|_p = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_p = 2^{1/p} \tag{17}$$

Quindi la (16) è verificata solo se

$$(2^{1/p})^2 + (2^{1/p})^2 = 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 \tag{18}$$

cioè se $2\cdot 2^{2/p} = 2+2 = 4$, quindi solo per $p=2$.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia V uno spazio vettoriale pre-Hilbertiano. Vale la seguente disuguaglianza:

$$|(v,w)_V| \leq \|v\|_V\,\|w\|_V \quad \forall\, v,w\in V$$

Dimostrazione.
Siano v, w due qualunque funzioni $\in V$ e sia $t\in\mathbb{R}$. Ovviamente si ha che $tv-w\ \in V$ e che

$$\|tv-w\|_V^2 \geq 0.$$

Sviluppando il quadrato si ha:

$$\underbrace{t^2\|v\|_V^2 - 2t(v,w)_V + \|w\|_V^2}_{g(t)} \geq 0 \tag{19, 20}$$

L'equazione (di secondo grado in t) $g(t) = 0$ non può avere radici reali distinte, quindi il discriminante è ≤ 0:

$$4(v,w)_V^2 - 4\|v\|_V^2\,\|w\|_V^2 \leq 0$$

da cui il risultato.

Spazi di Hilbert

Uno spazio vettoriale pre-Hilbertiano V è di Hilbert se è anche completo, cioè se ogni successione di Cauchy converge, cioè:

$$\{v_n\} \text{ successione di Cauchy} \quad \Rightarrow \quad \exists v \in V \text{ tale che} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

Ricordiamo che, in uno spazio normato, una successione $\{v_n\}$ è **di Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \text{ interi } > n_\varepsilon \text{ si ha } \|v_n - v_m\|_V < \varepsilon. \tag{21}$$

Conoscendo la ben nota avversione della maggioranza degli studenti per le successioni di Cauchy, in questo corso non insisteremo troppo sulla differenza tra spazi pre-Hilbertiani e spazi di Hilbert. Questa è in effetti una *trasgressione grave* ma per gli scopi principali del nostro corso (la conoscenza dei metodi numerici da usare per approssimare la soluzione di problemi ai limiti per Equazioni a Derivate Parziali) la cosa non avrà effetti troppo deleteri.

Lo spazio $L^2(\Omega)$

Come abbiamo già osservato, le proprietà di regolarità che servono perchè (PV) abbia senso, <u>non</u> sono proprietà di continuità/derivabilità, ma proprietà di integrabilità.

Cominciamo quindi a richiamare alcuni classici spazi di funzioni la cui definizione è connessa alla *integrabilità*.

Uno spazio funzionale che useremo spesso è lo spazio:

$$L^2(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tali che } \int_\Omega v^2\, \mathrm{d}\Omega < +\infty\}.$$

Nota Un docente (ad esempio) di "Istituzioni di Analisi Superiore" vi direbbe che gli elementi di L^2 sono in realtà delle *classi di funzioni* (definite a meno di insiemi con misura di Lebesgue uguale a zero) e che l'integrabilità va intesa nel senso di Lebesgue. In pratica, però, per la risoluzione numerica noi useremo solo delle funzioni polinomiali a tratti, e per queste funzioni le differenze a cui stiamo accennando sono del tutto irrilevanti.

L^2 è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare e norma dati da

$$(v, w)_{L^2} = \int_\Omega vw \, \mathrm{d}\Omega \qquad\qquad \|v\|^2_{L^2} = \int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}\Omega. \tag{22}$$

Spesso il prodotto scalare in L^2 viene indicato con $(\cdot, \cdot)_0$ e la norma viene indicata come $\|\cdot\|_0$. Verifichiamo almeno che L^2 è uno spazio pre-Hilbertiano

1. Spazio vettoriale
   - $\forall v_1, v_2 \in L^2$ si ha $v_1 + v_2 \in L^2$?

     $$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2_{L^2} &= \|v_1\|^2_{L^2} + \|v_2\|^2_{L^2} + 2(v_1, v_2)_{L^2} \\ &\le \underbrace{\|v_1\|^2_{L^2} + \|v_2\|^2_{L^2} + 2\|v_1\|_{L^2} \, \|v_2\|_{L^2}}_{(Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|v_1\|_{L^2} + \|v_2\|_{L^2})^2 < +\infty \end{aligned}$$

   - $\alpha \, v \in L^2$, $\forall v \in L^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$? Si perché $\|\alpha v\|^2_{L^2} = \alpha^2 \|v\|^2_{L^2}$
2. $(u, v)_{L^2} = \int_\Omega uv \, \mathrm{d}\Omega$ è un prodotto scalare?
   - La simmetria e la bi-linerità sono ovvie.
   - $(v, v)_{L^2} \ge 0$ è anch'esso ovvio.
   - $(v, v)_{L^2} = 0 \Leftrightarrow v = 0$?
     Se $v = 0 \Rightarrow (v, v)_{L^2} = 0$. E se $(v, v)_{L^2} = 0 \Rightarrow \int_\Omega v^2 = 0 \Rightarrow v = 0$

La completezza è abbastanza difficile da dimostrare e non viene fatta.

Gli spazi H^1 e H^1_0

Torniamo a (PV). Lo spazio L^2, con le sue proprietà, permette di dare un senso all'integrale $\int_\Omega f \, v$. Infatti, dalla definizione di prodotto scalare in L^2 e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha:

$$\text{se } f \in L^2 \text{ e } v \in L^2, \qquad \int_\Omega f \, v = (f, v)_{L^2} \le \|f\|_{L^2} \, \|v\|_{L^2} \quad \text{(finito)}$$

Per dare un senso a $\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$, non basta che u e v siano in L^2; serve che anche $\underline{\nabla} u$ e $\underline{\nabla} v$ siano in $[L^2]^2$, perchè in tal modo si avrebbe:

$$\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = (\underline{\nabla} u, \underline{\nabla} v)_{L^2} \leq \|\underline{\nabla} u\|_{L^2} \|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \quad \text{(finito)}$$

Introduciamo quindi lo spazio:

$$H^1(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } \int_\Omega v^2 < +\infty, \int_\Omega |\nabla v|^2 < +\infty\} \tag{23}$$

$$\equiv \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } v \in L^2(\Omega), \underline{\nabla} u \in [L^2(\Omega)]^2\} \tag{24}$$

La norma ragionevole da usare è:

$$\|v\|_{H^1}^2 := \|v\|_{L^2}^2 + \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}^2$$

e il prodotto scalare associato

$$(v, w)_{H^1} = (v, w)_{L^2} + (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_{L^2}$$

Si può dimostrare (non lo faremo qui) che con questo prodotto scalare, H^1 è uno spazio di Hilbert.

Nota: Le derivate che compaiono in (23) e (24) sono *derivate deboli*. Esse coincidono con le derivate usuali quando, ad esempio, le funzioni sono continue e derivabili a tratti (sarà sempre il nostro caso!). Torneremo su questo tra breve.

Per comodità di scrittura introduciamo anche lo spazio

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^1(\Omega) \tag{25}$$

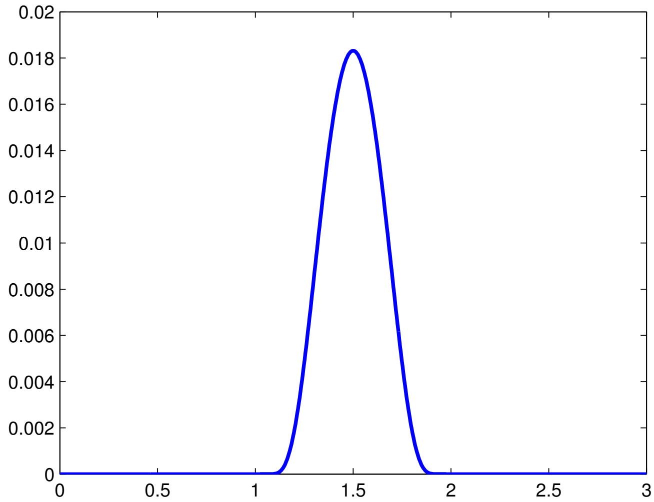
(sottospazio di $H^1(\Omega)$). Come sottospazio di H^1, H_0^1 eredita la $\|\cdot\|_{H^1}$. Si può dimostrare che anche H_0^1 è uno spazio di Hilbert.

Definizione di **derivata debole**

Le derivate che intervengono nella definizione di H^1 non sono derivate in senso classico, ma derivate "*deboli*". Vediamo più da vicino di cosa si tratta.

Come primo passo, richiamiamo la definizione dello spazio $C_0^\infty(]a,b[)$ dove $]a,b[$ è un intervallo della retta reale: $C_0^\infty(]a,b[)$ è lo spazio delle funzioni $]a,b[\to \mathbb{R}$, derivabili infinite volte, e identicamente nulle in un intorno destro di a e in un intorno sinistro di b. Un esempio, sull'intervallo $]0,3[$ è dato dalla funzione (si veda la figura)

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } \ x \in]0,1], \\ e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}} & \text{per } \ x \in]1,2[, \\ 0 & \text{per } \ x \in]2,3[. \end{cases}$$



È banale osservare che $C_0^\infty(]a,b[) \subset L^2(]a,b[)$, qualunque sia l'intervallo $]a,b[$. Una importante proprietà dello spazio $C_0^\infty(]a,b[)$ è la seguente:
La sola funzione di $L^2(]a,b[)$ ortogonale a tutte le funzioni di $C_0^\infty(]a,b[)$ è la funzione nulla:

$$\left\{ f \in L^2(]a,b[) \text{ e } (f,\varphi)_{L^2(]a,b[)} = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(]a,b[) \right\} \Rightarrow f = 0 \tag{26}$$

Siamo ora in grado di precisare la frase "*la funzione* $v \in L^2(a,b)$ *ha la derivata debole in* $L^2(a,b)$":
Data una funzione $v \in L^2(a,b)$, si dice che la sua derivata debole $v' \in L^2(a,b)$ se:

$$\exists\, g \in L^2(a,b) \text{ t.c. } \int_a^b v\, \varphi'\, dx = -\int_a^b g\, \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b) \tag{27}$$

Verifichiamo che se v è derivabile in senso classico, la (27) coincide con la classica nozione di $v' \in L^2(a,b)$. Infatti, se v è derivabile, si può integrare per parti nella (27) e si ottiene:

$$-\int_a^b v'\, \varphi\, dx = -\int_a^b g\, \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b) \Rightarrow g \equiv v'$$

Analogamente, in $2D$, ricordiamo che per un aperto Ω di definisce $C_0^\infty(\Omega)$ come l'insieme delle funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ che sono derivabili in Ω (rispetto a tutte le direzioni) infinite volte, e sono identicamente nulle in tutto un intorno del bordo $\partial\Omega$.

Poi, data $v \in L^2(\Omega)$, diremo che $\underline{\nabla} v \in [L^2(\Omega)]^2$ (e quindi che $v \in H^1(\Omega)$), se esiste un $\underline{g} \in [L^2(\Omega)]^2$ tale che:

$$\int_\Omega v\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dxdy = -\int_\Omega g_1\,\varphi dxdy \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{28}$$

$$\int_\Omega v\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dxdy = -\int_\Omega g_2\,\varphi dxdy \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{29}$$

Come nel caso mono-dimensionale, se le derivate parziali classiche $\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ esistono, integrando per parti si ottiene: $g_1 = \dfrac{\partial v}{\partial x} \in L^2$, $g_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y} \in L^2$

Disuguaglianza di Poincaré

$$\exists\, C_p > 0 : \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \le C_p\, \|\underline{\nabla} v\|_{L^2(D)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Dimostrazione.
Consideriamo il caso monodimensionale ($\Omega = [a,b]$). Quindi

$$H_0^1(a,b) = \{v \in H^1(a,b) : \; v(a) = v(b) = 0\}$$

Dal 1^o teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\forall\, x \in (a,b) \quad v(x) = \int_a^x v'(t)\,dt \to v^2(x) = \Big(\int_a^x v'(t)\,dt\Big)^2 \implies$$

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} \equiv \int_a^b v^2\,dx = \int_a^b \Big(\int_a^x v'(t)dt\Big)^2 \mathrm{d}x = \int_a^b (v',1)^2_{L^2(a,x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\le \int_a^b \underbrace{\Big(\|v'\|^2_{L^2(a,x)}\,\|1\|^2_{L^2(a,x)}\Big)}_{(Cauchy-Schwarz)} dx \le \|v'\|^2_{L^2(a,b)} \int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}\|v'\|^2_{L^2(a,b)}$$

da cui:

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \le \frac{(b-a)}{\sqrt{2}}\|v'\|_{L^2(a,b)} \qquad \Big(\text{quindi } C_p = \frac{(b-a)}{\sqrt{2}}\Big)$$

La dimostrazione si estende al caso $2D$, con C_p che dipende dalla misura del dominio Ω.

Nota: come si vede dalla dimostrazione, la disuguaglianza vale se $v(a) = 0$ oppure $v(b) = 0$, ossia basta l'annullamento in un punto solo. In $2D$ basta che v sia nulla su un pezzo (diciamo: un sottoinsieme di lunghezza non nulla) del bordo di Ω.

Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré

In $H_0^1(\Omega)$, o in $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1, v = 0 \text{ su } \Gamma_D\}$, la $\|v\|_{H^1}$ è equivalente alla $|\underline{\nabla} v\|_{L^2}$. Precisamente:

$$\|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \le \|\underline{v}\|_{H^1} \le \sqrt{C_p^2 + 1}\|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ o } v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$$

dove C_p è la costante della disuguaglianza di Poincaré.

Dimostrazione:

La prima disuguaglianza è ovvia; poichè $\|v\|_{L^2} \ge 0$ si ha

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}^2 \ge \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}^2$$

Per Poincaré:

$$\|v\|_{H^1}^2 \le C_p^2 \, \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}^2 + \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}^2 = (C_p^2 + 1) \, \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}^2$$

da cui si ottiene il risultato.

Quindi in H_0^1, o in H_{0,Γ_D}^1 si può usare indifferentemente l'una o l'altra norma, secondo quanto più conveniente.

Formulazioni variazionali dei problemi $(ES1)$–$(ES4)$

Formulazione variazionale del Problema ES1

Con le notazioni che abbiamo introdotto il problema (14) diventa:

$$\begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \ \text{ con } \ u = 0 \ \text{ su } \ \partial\Omega, \ \text{soluzione di :} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H^1(\Omega), \text{ con } v = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

che usando anche la notazione (25) può essere scritto come

$$(PV)_1 \begin{cases} \text{trovare } u \in H_0^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{30}$$

che rappresenta la *Formulazione variazionale del problema di Dirichlet omogeneo ES1*.
Se invece abbiamo un problema di Dirichlet *non omogeneo*

$$(ES1g)\begin{cases} -\Delta u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = g & su \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

(con $g \neq 0$), visto che la condizione di Dirichlet è *forzata*, bisogna introdurre lo spazio

$$H^1_g(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = g\} \subset H^1(\Omega). \tag{31}$$

Notiamo che non si tratta di uno spazio vettoriale *lineare*; ad esempio, la somma di due funzioni di H^1_g, ciascuna delle quali è uguale a g su $\partial\Omega$, sarà una funzione che vale $2g$ su $\partial\Omega$, e quindi non starà più in H^1_g (bensì in H^1_{2g}!); e se ad esempio $u \in H^1_g$, ovviamente $3u \in H^1_{3g}$. Si tratta di un cosiddetto *spazio vettoriale affine* (spesso abbreviato con *spazio affine*): in particolare, data una *qualunque* funzione $u^*_g \in H^1_g$ (fissata una volta per tutte), si ha evidentemente

$$H^1_g \equiv \{u^*_g\} + H^1_0, \tag{32}$$

intendendo che ogni funzione u di H^1_g può essere scritta come somma di u^*_g (sempre lei!) più una opportuna funzione u_0 di H^1_0 (che, a conti fatti, sarà ovviamente $u_0 = u - u^*_g$).

Una volta introdotto lo spazio H^1_g, la formulazione variazionale di $(ES1g)$ diventa ovviamente

$$(PVg)_1 \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1_g(\Omega), \text{ tale che :} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases} \tag{33}$$

Come avevamo anticipato, qui V_{trial} (che risulta essere uguale a $H^1_g(\Omega)$) **non** coincide con V_{test} (che risulta invece essere uguale a $H^1_0(\Omega)$).

Formulazione variazionale del Problema (ES2)

Per scrivere la formulazione variazionale del problema $(ES2)$ procediamo come prima:

$$\int_\Omega f\, v = \int_\Omega -\Delta u\, v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega u\, v \tag{34}$$

$\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0$ perchè $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (condizione naturale). Quindi si ottiene

$$(PV)_2 \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{35}$$

che rappresenta la *formulazione variazionale del problema di Neumann omogeneo (ES2)*. Supponiamo ore di avere un problema di Neumann *non omogeneo*

$$(ES2g)\begin{cases} -\Delta u + u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & su \quad \Gamma \end{cases}$$

con $g \neq 0$. In questo caso, ritornando alla (34) si ha che il termine $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v$ non sarà più uguale a zero, ma a $\displaystyle\int_{\partial\Omega} gv$, e quindi la formulazione variazionale diventa

$$(PVg)_2 \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v + \int_{\partial\Omega} gv \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{36}$$

che è la *formulazione variazionale del problema di Neumann nonomogeneo (ES2g)* Come avevamo preannunciato, gli spazi V_{trial} e V_{test}, in questo caso, coincidono ancora (come nel caso del problema di Neumann omogeneo), e la informazione sul dato g è finita al secondo membro.

Formulazione variazionale del Problema (ES3)

Per il problema $(ES3)$, l'unica differenza rispetto $(PV)_2$ è data dalle condizioni ai limiti: $u = 0$ su Γ_D (da imporre) e $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ su Γ_N (naturale). In questo caso:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v$$

L'unico modo per eliminare l'integrale sul bordo Γ_D è di scegliere le funzioni test v nulle su Γ_D (come la soluzione u). Quindi:

$$(PV)_3 \begin{cases} \text{trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{37}$$

che rappresenta la *formulazione variazionale del problema misto Dirichlet-Neumann omogeneo (ES3)*.

Naturalmente, anche in questo caso si potrebbero considerare condizioni *non omogenee*, ad esempio $u = g_D$ su Γ_D e $\partial u/\partial n = g_N$ su Γ_N. Questo ci porterebbe a uno spazio *trial*, $V_{g,D}$ (che sarebbe uno spazio *affine* se $g_D \neq 0$), e ad uno spazio *test*, $V_{0,D}$ (che sarebbe un vero spazio vettoriale lineare).

La formulazione variazionale sarebbe quindi

$$(PVg)_3 \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1_{g_D,D}, \text{soluzione di :} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v + \int_{\Gamma_N} g_N\, v \quad \forall v \in H^1_{0,D} \end{cases}$$

Formulazione variazionale del Problema ES4

Per il problema $(ES4)$ (condizioni ai limiti come nell'ES3, operatore differenziale con coefficienti variabili) si procede allo stesso modo:

$$\int_\Omega f\, v = \int_\Omega -div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u)\, v + \int_\Omega \gamma(x) u\, v.$$

Usando sempre la formula di *Gauss-Green* (con $\underline{V} = k(\underline{x})\nabla u$) si ottiene

$$-\int_\Omega div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u)\, v = \int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v$$

Essendo $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ si ha

$$\int_{\partial\Omega} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v = \underbrace{\int_{\Gamma_N} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v}_{=0 \text{ perché } k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 \text{ su } \Gamma_N} + \int_{\Gamma_D} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v$$

Per annullare $\int_{\Gamma_D}$ basta scegliere $v = 0$ su Γ_D (come u), ottenendo

$$(PV)_4 \begin{cases} \text{trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) u\, v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{38}$$

che rappresenta la *formulazione variazionale del problema misto Dirichlet-Neumann omogeneo (ES4)*.

Anche in questo caso, potremmo sostituire le condizioni ai limiti *omogenee* di $(ES4)$ con condizioni ai limiti *non omogenee*. Tutto si svolgerebbe come per il problema $(ES3)$. Infatti, in casi come questo, l'uso o meno di coefficienti variabili non condiziona il modo in cui si devono trattare le condizioni ai limiti. Vedremo in seguito le condizioni su $k(\underline{x})$ e $\gamma(\underline{x})$ affinchè il problema sia ben posto.

Formulazioni variazionali astratte

Dagli esempi precedenti si è visto che si passa dal problema differenziale in forma forte alla sua formulazione variazionale con una procedura che sostanzialmente è la stessa per tutti i problemi. Gli ingredienti principali sono le formule di Gauss-Green e una scelta opportuna delle funzioni test (nulle laddove sono imposte condizioni di Dirichlet, senza alcun vincolo laddove si hanno condizioni di Neumann).

Inoltre, come anticipato in (13) e come abbiamo visto negli dagli esempi, tutte le formulazioni variazionali presentano la stessa struttura e possono essere scritti in forma astratta come:

$$\text{trovare } u \in V \text{ tale che} \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V. \tag{39}$$

Lo strumento per studiare la buona posizione di un problema variazionale è il Lemma di Lax-Milgram. Si tratta di un risultato importante, che richiameremo con parecchi dettagli.

Lemma di LAX-MILGRAM:

Consideriamo il problema (del tipo (39)):,

$$(PVar) \qquad \text{trovare } u \in V \text{ tale che} \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V, \tag{40}$$

dove:

- V è uno spazio di Hilbert con norma $\|v\|_V$, e prodotto scalare associato $(v, w)_V$;
- $a(\cdot, \cdot)$ è una forma bilineare da $V \times V \to \mathbb{R}$ e continua, cioè (come abbiamo visto):

$$\exists M > 0 \quad t.c. \quad |a(v, w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v, w \in V \tag{41}$$

- $\ell(v)$ è un funzionale da $V \to \mathbb{R}$ lineare e continuo, cioè (come abbiamo visto):

$$\exists C_l > 0 \quad t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_l\|v\|_V \quad \forall v \in V \tag{42}$$

Se, oltre alle ipotesi precedenti, $a(\cdot, \cdot)$ è V-ellittica (o *coerciva*), cioè:

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{tale che} \quad a(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \tag{43}$$

allora $(PVar)$ ha un'unica soluzione e

$$\|u\|_V \leq \frac{C_l}{\alpha}.$$

Inoltre, se $a(\cdot,\cdot)$ è simmetrica, cioè

$$\underbrace{a(v,w) = a(w,v) \quad \forall v,w \in V}_{\text{simmetria}}$$

allora introducendo il funzionale (dell'energia)

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$$

si ha che il problema (40) è equivalente al *problema di minimo*:

$$(PMin) \qquad \text{trovare } u \in V \text{ tale che } J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V \qquad (44)$$

Dimostrazione

Per semplicità ometteremo qui la dimostrazione della esistenza della soluzione (un po' troppo complicata per le conoscenze di base richieste in questo corso, che sarà presentata nella Appendice), e ci limiteremo alla dimostrazione degli altri punti.
Unicità della soluzione. L'unicità della soluzione si dimostra per contraddizione. Si supponga quindi che $u_1 \in V$ e $u_2 \in V$ siano due soluzioni di $(PVar)$ e che esse siano diverse tra loro $u_1 \neq u_2$. Quindi:

$$\begin{aligned} u_1 \in V: &\quad a(u_1,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \\ u_2 \in V: &\quad a(u_2,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Sottraendo e sfruttando la linearità nel primo argomento di a, si ottiene:

$$a(u_1,v) - a(u_2,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

e poichè essa vale per qualsiasi $v \in V$, si ha in particolare

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Dalla (43) (ellitticità di a) si deduce quindi

$$\alpha\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Per la proprietà della norma di essere ≥ 0 si deve avere:

$$u_1 - u_2 \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

da cui la contraddizione. Quindi la soluzione è unica.

Stabilità. Sia u l'unica soluzione di (40). Sfruttiamo ora, con $v = u$, la (43) (cioè la V-ellitticità di a), la (40) (cioè il fatto che u risolve (40)), e, sempre con $v = u$, la (42) (limitatezza di ℓ). Abbiamo

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = \ell(u) \leq C_l\|u\|_V,$$

da cui banalmente

$$\|u\|_V^2 \leq \frac{C_l}{\alpha}\|u\|_V \qquad \text{e quindi} \qquad \|u\|_V \leq \frac{C_l}{\alpha}.$$

Equivalenza Dimostriamo ora che se inoltre a è simmetrica, allora si ha l'equivalenza tra il problema variazionale $(PVar)$ e il problema di minimo $(PMin)$. In altre parole, si vuole dimostrare che: se $\overline{u}$ risolve $(PMin)$ allora risolve anche $(PVar)$ e, viceversa, se u risolve $(PVar)$ allora risolve anche $(PMin)$. Cominciamo dalla prima.

1. $(PMin) \Rightarrow (PVar)$, cioè:
   Ipotesi: $\overline{u} \in V$ è tale che $J(\overline{u}) \leq J(w) \quad \forall w \in V$
   Tesi: $a(\overline{u}, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$

   Per ogni $v \in V$, e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ prendiamo $w = \overline{u} + \lambda v$. Si ha: $J(\overline{u}) \leq J(w) = J(\overline{u} + \lambda v)$. Allora la funzione $F(\lambda) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

   $$F(\lambda) = J(\overline{u} + \lambda v)$$

   ha un minimo per $\lambda = 0$. Esplicitando l'espressione del funzionale J abbiamo

   $$\begin{aligned} F(\lambda) = J(\overline{u}+\lambda v) &= \underbrace{\frac{1}{2}a(\overline{u}+\lambda v, \overline{u}+\lambda v) - \ell(\overline{u}+\lambda v)}_{\text{dalla definizione del funzionale } J} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}a(\overline{u},\overline{u}) + \frac{\lambda}{2}a(v,\overline{u}) + \frac{\lambda}{2}a(\overline{u},v) + \frac{\lambda^2}{2}a(v,v) - \ell(\overline{u}) - \lambda\ell(v)}_{\text{usando la bilinearità di } a \text{ e la linearità di } \ell} = \\ &= \underbrace{\frac{a(v,v)}{2}\lambda^2 + a(\overline{u},v)\lambda - \ell(v)\lambda + \frac{1}{2}a(\overline{u},\overline{u}) - \ell(\overline{u})}_{\text{per la simmetria di } a} \end{aligned}$$

   Quindi $F(\lambda)$ è una parabola in λ, convessa perché il coefficiente di λ^2 è positivo (per l'ipotesi di ellitticità). Per trovare il minimo si deve porre uguale a zero la $F'(\lambda)$ calcolata per $\lambda = 0$. Essendo ovviamente $F'(\lambda) = \lambda a(v,v) + a(\overline{u},v) - \ell(v)$ avremo che

   $$F'(0) = 0 \quad \Rightarrow a(\overline{u},v) - \ell(v) = 0$$

Ma il ragionamento è stato fatto partendo da una *qualsiasi* $v \in V$, e quindi avremo che

$$a(\overline{u}, v) - \ell(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto di minimo per J risolve il problema variazionale $(PVar)$. Notiamo anche che, poichè $(PVar)$ ha un'unica soluzione, anche il punto di minimo di J deve essere unico.

Passiamo quindi a dimostrare la seconda parte del nostro *se e solo se*.

2. $(PVar) \Rightarrow (PMin)$, cioè:
   Ipotesi: $u \in V$ è tale che $\quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$ (u risolve (40))
   Tesi: $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V$ (u minimizza il funzionale dell'energia)
   Consideriamo la differenza

   $$J(u) - J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u) - \frac{1}{2}a(v, v) + \ell(v)}_{\text{dalla definizione di } J}.$$

   Se al membro di destra si somma la quantità positiva $\frac{1}{2}a(u - v, u - v)$ (si sa che è positiva dalla proprietà di ellitticità), si ottiene:

   $$J(u) - J(v) \leq \frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u) - \frac{1}{2}a(v, v) + \ell(v) + \frac{1}{2}a(u - v, u - v) \qquad (*)$$

   Si prenda in considerazione solo l'ultimo addendo aggiunto:

   $$\frac{1}{2}a(u - v, u - v) = \underbrace{\frac{1}{2}a(u, u) - \underbrace{\frac{1}{2}a(v, u) - \frac{1}{2}a(u, v)}_{\text{uguali per la simmetria}} + \frac{1}{2}a(v, v)}_{\text{per la linearità}} =$$
   $$= \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, v) + \frac{1}{2}a(v, v)$$

   che inserito in $(*)$ dà:

   $$J(u) - J(v) \leq \frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u) - \frac{1}{2}a(v, v) + \ell(v) + \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, v) + \frac{1}{2}a(v, v)$$
   $$= a(u, u) - \ell(u) - a(u, v) + \ell(v) = 0$$

   dove l'ultima uguaglianza si ottiene sfruttando (2 volte!) l'ipotesi (che u risolve $(PVar)$). Quindi $J(u) - J(v) \leq 0$ $\forall v \in V$, che è la tesi. $\square$

Applicazioni del Lemma di Lax-Milgram

.

Esistenza e unicità della soluzione di $(ES1)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES1)$ data da (si veda (30)):

$$(PV_1)\begin{cases}\text{Trovare } u \in H_0^1(\Omega)\text{:}\\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\end{cases} \tag{45}$$

Per utilizzare il Lemma su (PV_1), lo riscriviamo in forma astratta definendo

$$V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v,w \in V$$

- $V = H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con norma e prodotto scalare

$$\|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_0 \qquad , \qquad (v,w)_V = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0$$

- si deve verificare che:

  $a(v,w)$ è bilineare, continua ed ellittica,
  $\ell(v)$ è lineare e continuo.

  Quindi partendo da $a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$
  La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.

  Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:

$$|a(v,w)| \le M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v,\, w \in V.$$

  Si ottiene:

$$a(v,w) = \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 \underbrace{\le \|v\|_V\|w\|_V}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \quad \Rightarrow$$

  $\Rightarrow$ continua con $M = 1$

  Per l'ellitticità si deve trovare una costante $\alpha > 0$ per cui si ha:

$$a(v,v) \ge \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

  Nel nostro caso si ottiene, per ogni $v \in V$:

$$a(v,v) = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} v)_0 = \|v\|_V^2 \Rightarrow \quad \underbrace{\text{vale l'ellitticità con } \alpha = 1}_{a(v,v)\ge\alpha\|v\|_V^2}$$

- Infine: $\ell(v)$ è lineare per le proprietà dell'integrale, e deve valere la continuità, cioè

$$\exists C_l > 0 \ t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_l \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Nel caso considerato:

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f, v)_0 \underbrace{\leq \|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \qquad \underbrace{\leq \|f\|_0 C_p \|v\|_V}_{\text{Poincaré (vale perchè } v \in H_0^1)} \qquad \forall v \in V.$$

Quindi $\ell(v)$ è continuo e la costante di continuità è

$$C_l = \|f\|_0 C_p$$

- $a(u, v)$ è anche simmetrica.

Quindi in conclusione possiamo applicare il Lemma di Lax Milgram, e ottenere che il problema $(ES1)$ ha un'unica soluzione, e si ha:

$$\|u\|_V \leq \frac{C_l}{\alpha} = \|f\|_0 C_p \tag{46}$$

e quindi si ha anche dipendenza continua dai dati (f è il solo dato del problema)

Osservazione il risultato $\|u\|_V \leq \dfrac{C_l}{\alpha}$ lega la norma della soluzione ai dati del problema (C_l, costante di continuità del funzionale, è una costante che dipende dal carico dato f, mentre α, costante di ellitticità, dipende in generale dalle proprietà del materiale).

Stabilità del problema $(ES1)$

Come abbiamo già più volte osservato, la dipendenza continua dai dati garantisce la stabilità del problema, garantisce cioè che "piccoli" errori sui dati determinano "piccoli" errori sulla soluzione. Vediamolo in dettaglio sul problema che stiamo esaminando. Sia u la soluzione "vera" corrispondente al dato f, e sia u^S la soluzione "sporca" corrispondente a un dato f^S "sporco" (ad esempio, proviene da dati di laboratorio con un margine di errore). Quindi:

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f v \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(in astratto: $u \in V : \ a(u, v) = (f, v)_0 \ \forall v \in V$)

$$u^S \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \underline{\nabla} u^S \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f^S v \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(in astratto: $u^S \in V : \ a(u^S, v) = (f^S, v)_0 \ \forall v \in V$)

Facendo la differenza fra i due problemi si ottiene:

$$u - u^S \in H^1_0(\Omega): \quad \int_\Omega \underline{\nabla}(u-u^S)\cdot\underline{\nabla}v = \int_\Omega (f-f^S)v \;\forall v \in H^1_0(\Omega)$$
$$\text{(in astratto } u-u^S \in V: \; a(u-u^S, v) = (f-f^S, v)_0 \;\forall v \in V,$$

ossia, la funzione $u - u^S$ risolve il problema con dato $f - f^S$. La dipendenza continua dai dati assicura che

$$\|u - u^S\|_V \le C_P \|f - f^S\|_0.$$

Quindi, se $\|f - f^S\|_0 \le \varepsilon$, con ε piccolo, si ha $\|u - u^S\|_V \le C_P\varepsilon$. □

Il problema non omogeneo (ES1g)

L'applicazione del Lemma di Lax-Milgram al caso delle condizioni di Dirichlet non omogenee (33) è molto simile, ma richiede, inizialmente, maggiore attenzione. Infatti, come abbiamo osservato a proposito della definizione (31), lo spazio *trial*, che qui è $H^1_g(\Omega)$, **non** è uno spazio vettoriale lineare, e inoltre è diverso dallo spazio *test* $H^1_0(\Omega)$. Bisogna quindi ricorrere alla decomposizione (32). Supponiamo allora (cosa che nella pratica non sarà molto complicata) di conoscere esplicitamente *una* funzione (*qualsiasi!*) di $H^1_g(\Omega)$. La nostra incognita u potrà quindi essere scritta come $u = u_g + u_0$ dove u_g è nota (l'abbiamo scelta noi) e $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ diventa la nostra *nuova incognita*. Con questa notazione il problema (33) diventa

$$(PVg)_1 \begin{cases} \text{trovare } u_0 \in H^1_0(\Omega), \text{ tale che}: \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla}u_0 \cdot \underline{\nabla}v = \int_\Omega f\,v \; - \int_\Omega \underline{\nabla}u_g \cdot \underline{\nabla}v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases} \tag{47}$$

che differisce dal caso omogeneo (45) solo per il secondo membro, che qui risulta essere

$$\ell(v) := \int_\Omega f\,v \; - \int_\Omega \underline{\nabla}u_g \cdot \underline{\nabla}v. \tag{48}$$

È banale verificare cha anche questo ℓ risulta essere *lineare*. Per la sua continuità osserviamo che, come abbiamo già visto

$$\int_\Omega f\,v = (f,v)_0 \le \underbrace{\|f\|_0\|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \quad \underbrace{\le \|f\|_0 C_p \|v\|_V}_{\text{Poincaré (perchè } v \in H^1_0)} \qquad \forall v \in V$$

e ora abbiamo anche

$$\int_\Omega \underline{\nabla}u_g \cdot \underline{\nabla}v \le \underbrace{\|\underline{\nabla}u_g\|_0 \|\underline{\nabla}v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} = \|\underline{\nabla}u_g\|_0 \,\|v\|_V \quad \forall v \in V$$

e quindi (sommando le due) anche il nuovo $\ell(v)$ è continuo e la costante di continuità è

$$C_l = C_p\|f\|_0 + \|\underline{\nabla} u_g\|_0,$$

e tutto procede (sostanzialmente) come prima.

Esistenza, unicità e stabilità del problema (ES2)

Quanto fatto per il problema $(ES1)$ si può ripetere, in modo quasi identico, per gli altri problemi. Vediamo il problema $(ES2)$, la cui formulazione variazionale era (35):

$$(PV)_2 \begin{cases} \text{Trovare } u \in V := H^1(\Omega) \text{ tale che:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Applichiamo il Lemma di Lax-Milgram con

$$a(v, w) = \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w + \int_\Omega v\, w, \qquad \ell(v) = \int_\Omega f\, v.$$

Come norma dobbiamo usare la norma di H^1. Avremo ancora

- V è spazio di Hilbert con $\|v\|_V = \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$
- a è bilineare per la proprietà degli integrali ed è continua perchè

  $a(v, w) = (v, w)_1 \le \|v\|_1 \|w\|_1$ da cui si ha la costante di continuità $M = 1$

  (deriva dalla disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*).
- ellitticità: $(a(v, v) \ge \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V)$
  $a(v, v) = (v, v)_1 = \|v\|_1^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1$
- continuità del funzionale: $(\ell(v) \le C_l\|v\|_V \quad \forall v \in V)$

  $$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f, v)_0 \le \|f\|_0\|v\|_0 \le \underbrace{\|f\|_0\|v\|_V}_{\|v\|_0 \le \|v\|_V}$$

  e $C_l = \|f\|_0$. Quindi: il problema ha soluzione unica $u \in V$ e

  $$\|u\|_1 \le \|f\|_0.$$

Il problema non omogeneo$(ES2g)$

Ricordiamo la formulazione variazionale del problema non omogeneo $(ES2g)$

$$(PVg)_2 \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v + \int_{\partial\Omega} g v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{49}$$

e notiamo che, questa volta (grazie al fatto che la condizione di Neumann è *naturale*), anche nel problema non omogeneo abbiamo che lo spazio *trial* e lo spazio *test* coincidono (sono entrambi uguali a $V := H^1(\Omega)$) e la differenza con il caso omogeneo si riscontra solo nel secondo membro

$$\ell(v) := \int_\Omega f\, v + \int_{\partial\Omega} g v \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Anche qui, dobbiamo solo verificare la limitatezza di ℓ. Il primo passo è semplice

$$\int_\Omega f\, v = (f, v)_0 \leq \underbrace{\|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \|f\|_0 \|v\|_V$$

e anche

$$\int_{\partial\Omega} g v \leq \underbrace{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}}_{\text{Cauchy-Schwarz}}$$

ma il passo successivo, che consisterebbe nel maggiorare $\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}$ con $\|v\|_V$, pur essendo intuitivamente ragionevole richiederebbe, per essere *dimostrato correttamente*, strumenti che sono molto al di fuori dalla portata di questo corso, e gli studenti dovranno accontentarsi *della parola* del docente (e molti saranno ben lieti di farlo).

Il problema $(ES3)$

Occupiamoci ora del problema $ES3$ la cui formulazione variazionale (37), ricordiamo, era

$$(PV)_3 \begin{cases} \text{Trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : \ v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Applichiamo il Lemma di Lax-Milgram con

$$a(v, w) = \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w + \int_\Omega v\, w, \qquad \ell(v) = \int_\Omega f\, v.$$

Anche qui conviene scegliere la norma completa di H^1.

- V è spazio di Hilbert con $\|v\|_V = \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$
- a è bilineare per la proprietà degli integrali ed è continua perchè

  $a(v,w) = (v,w)_1 \leq \|v\|_1 \|w\|_1$ da cui si ha la costante di continuità $M = 1$

  (deriva dalla disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*).
- ellitticità (43): $a(v,v) = (v,v)_1 = \|v\|_1^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1$
- continuità del funzionale (42):

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f,v)_0 \leq \|f\|_0 \|v\|_0 \leq \|f\|_0 \underbrace{\|v\|_V}_{\|v\|_V^2 = \|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2}$$

  quindi $C_l = \|f\|_0$. In conclusione: soluzione unica $u \in V$ e

$$\|u\|_1 \leq \|f\|_0.$$

L'estensione al caso non omogeneo ricalca i due casi precedenti e, per brevità, viene omessa.

Altro esempio di applicazione del lemma di Lax-Milgram

Consideriamo il problema $(PV)_4$ che rientra nella scrittura astratta con:

$$\begin{aligned} V &:= \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \\ a(v,w) &:= \int_\Omega k(\underline{x}) \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) u\, v \\ \ell(v) &:= \int_\Omega f\, v \end{aligned}$$

Sappiamo che V è uno spazio di *Hilbert* sia con $\|v\|_V = \|v\|_{H^1}$ sia con $\|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}$. Scegliamo:

$$\|v\|_V = \|v\|_{H^1}$$

La bilinearità di $a(\cdot,\cdot)$ e la linearità di $l(\cdot)$ sono immediata conseguenza delle proprietà degli integrali

- Continuità di $\ell(\cdot)$ (serve $f \in L^2$)

$$\ell(v) = (f,v)_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \qquad \forall v \in V$$

  $(\Rightarrow\ C_l = \|f\|_{L^2})$

- Continuità di $a(\cdot,\cdot)$

$$
\begin{aligned}
a(v,w) &\le \max|k(\underline{x})|\,\|\underline{\nabla} v\|_{L^2}\|\underline{\nabla} w\|_{L^2} + \max|\gamma(\underline{x})|\,\|v\|_{L^2}\|w\|_{L^2}\\
&\le \underbrace{\max|k(\underline{x})|}_{k_{\max}}\,\|v\|_1\|w\|_1 + \underbrace{\max|\gamma(\underline{x})|}_{\gamma_{\max}}\,\|v\|_1\|w\|_1\\
&= \{k_{\max}+\gamma_{\max}\}\|v\|_1\|w\|_1 \qquad (M=\{k_{\max}+\gamma_{\max}\})
\end{aligned}
$$

(Questo vale se $\max|k(\underline{x})|$ e $\max|\gamma(\underline{x})|$ sono finiti)

- Ellitticità di $a(\cdot,\cdot)$:

$$a(v,v)=\int_\Omega k(\underline{x})|\underline{\nabla} v|^2+\int_\Omega \gamma(\underline{x})v^2$$

Per continuare, serve $k(\underline{x})$ positiva, non solo limitata, e $\gamma(\underline{x})$ non negativa. Quindi le ipotesi sui dati sono:

$$0<k_{\min}\le k(\underline{x})\le k_{\max} \qquad , \qquad 0\le\gamma_0\le\gamma(\underline{x})\le\gamma_{\max}$$

Se $\gamma(\underline{x})\ge\gamma_0>0$ possiamo prendere $\alpha:=\min\{k_{\min},\gamma_0\}$ e avere

$$
\begin{aligned}
a(v,v) &\ge k_{\min}\|\underline{\nabla} v\|_0^2+\gamma_0\|v\|_0^2\\
&\ge \min\{k_{\min},\gamma_0\}\|v\|_1^2
\end{aligned}
$$

Se invece $\gamma_0=0$, bisognerà usare Poincaré ($\|\underline{\nabla} v\|_0\ge\|v\|_0/C_P$) e scrivere, ad esempio:

$$
\begin{aligned}
a(v,v) &\ge k_{\min}\|\underline{\nabla} v\|_0^2=\frac{k_{\min}}{2}\|\underline{\nabla} v\|_0^2+\frac{k_{\min}}{2}\|\underline{\nabla} v\|_0^2\\
&\ge \frac{k_{\min}}{2}\|\underline{\nabla} v\|_0^2+\frac{k_{\min}}{2C_P^2}\|v\|_0^2\ge\min\{\frac{k_{\min}}{2},\frac{k_{\min}}{2C_p^2}\}\|v\|_1^2
\end{aligned}
$$

ottenendo la ellitticità con $\alpha=\min\{\frac{k_{\min}}{2},\frac{k_{\min}}{2C_p^2}\}$. Quindi, se i dati f, $k(\underline{x})$, $\gamma(\underline{x})$ verificano le ipotesi

$$
\begin{aligned}
&f\in L^2\\
&0<k_{\min}\le k(\underline{x})\le k_{\max}\\
&0\le\gamma_0\le\gamma(\underline{x})\le\gamma_{\max}
\end{aligned}
$$

tutte le ipotesi del *Lemma di Lax-Milgram* sono verificate, e dunque $(PV)_4$ ha una ed una sola soluzione $u\in V$, e inoltre

$$\|u\|_V\le\frac{\|f\|_0}{\alpha}$$

Alternativamente, in V si potrebbe scegliere come norma $\|v\|_V = \|\nabla v\|_0$, equivalente alla $\|v\|_1$, e si dovrebbe verificare il lemma di Lax-Milgram con la nuova norma. Vediamo cosa si otterrebbe con questa norma.

• Continuità di a:

$$
\begin{aligned}
a(v,w) &\leq \underbrace{k_{\max}\|\underline{\nabla} u\|_0\|\underline{\nabla} v\|_0 + \gamma_{\max}\|u\|_0\|v\|_0}_{per\ Cauchy-Schwarz} \\
&\leq k_{\max}\|\underline{\nabla} u\|_0\|\underline{\nabla} v\|_0 + \underbrace{\gamma_{\max}C_P^2\|\underline{\nabla} u\|_0\|\underline{\nabla} v\|_0}_{per\ Poincare'} = (k_{\max} + \gamma_{\max}C_P^2\}\|\underline{\nabla} u\|_0\|\underline{\nabla} v\|_0 \\
&\Rightarrow M = k_{\max} + \gamma_{\max}C_P^2
\end{aligned}
$$

• Ellitticità di a:

$$
a(v,v) \geq k_{\min}(\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} v)_0 + \gamma_0(v,v)_0 \geq k_{\min}\|\underline{\nabla} v\|_0^2 \qquad (\alpha = k_{\min})
$$

• Continuità di ℓ:

$$
\ell(v) = (f,v)_0 \leq \|f\|_0\|v\|_0 \leq C_P\|f\|_0\,\|\nabla v\|_0 \qquad (C_l = C_P\|f\|_0).
$$

Le ipotesi del Lemma sono verificate anche in questo caso, semplicemente le varie costanti che si ottengono sono diverse.

APPENDICE: Dimostrazione di Lax-Milgram

Come primo passo, dimostriamo il Teorema di Riesz:

Teorema di Riesz Sia H uno spazio di Hilbert, e $\varphi : H \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo su H. Allora esiste un elemento $u_\varphi \in H$ tale che

$$(u_\varphi, v)_H = \varphi(v) \quad \forall v \in H. \tag{50}$$

Dimostrazione. Il risultato è ovvio se $\varphi(v) \equiv 0$ per ogni v (prendendo $u_\varphi = 0$). Altrimenti poniamo

$$K := \{v \in H \text{ tale che } \varphi(v) = 0\} = \text{ nucleo di } \varphi$$

(che non potrà coincidere con "tutto H" visto che φ non è identicamente zero) e sia $K^\perp$ il suo ortogonale

$$K^\perp := \{v \in H \text{ tale che } (v, k)_H = 0\ \forall k \in K\}.$$

$K^\perp$ è uno spazio lineare non vuoto. Quindi possiamo prendere una $w \in K^\perp$ tale che $\|w\|_H = 1$. Poi definiamo

$$u_\varphi := w\varphi(w) \tag{51}$$

e controlliamo che tale u_φ verifichi (50). Ricordando che $\varphi(v)$ (qualunque sia la $v \in H$) è *uno scalare*, osserviamo dapprima che per ogni v di H si ha

$$\varphi(\varphi(w)v - w\varphi(v)) = \varphi(w)\varphi(v) - \varphi(w)\varphi(v) \equiv 0$$

e quindi $\varphi(w)v - w\varphi(v) \in K$. Siccome $w \in K^\perp$ avremo

$$(w, \varphi(w)v - w\varphi(v))_H = 0. \tag{52}$$

Per finire, per ogni $v \in H$, usando prima (51), poi il fatto che $\varphi(w)$ è uno scalare, poi la (52), poi che anche $\varphi(v)$ è uno scalare, ed infine che $\|w\|_H = 1$, avremo:

$$(u_\varphi, v)_H = (w\varphi(w), v)_H = (w, \varphi(w)v)_H = (w, w\varphi(v))_H = \varphi(v)\|w\|_H^2 = \varphi(v).$$

$\square$

Dal Teorema di Riesz segue abbastanza facilmente che lo spazio H' di tutte le applicazioni lineari e continue da H in $\mathbb{R}$ è anch'esso uno spazio di Hilbert, con la norma (10)

$$\|\ell\|_{H'} := \sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{\ell(v)}{\|v\|_H}$$

ed è isomorfo a H. Riguardando la dimostrazione del teorema di Riesz osserviamo anche che

$$\|u_\varphi\|_H = \|w\phi(w)\| = |\varphi(w)| = \frac{|\varphi(w)|}{\|w\|_H} \leq \|\varphi\|_{H'} \tag{53}$$

e che

$$\|\varphi\|_{H'} = \sup_{v\in H} \frac{\varphi(v)}{\|v\|_H} = \sup_{v\in H} \frac{(u_\varphi, v)}{\|v\|_H} \leq \|u_\varphi\| \tag{54}$$

Nel caso in cui la $a(u, v)$ è **simmetrica**, dal Teorema di Riesz scende immediatamente il Lemma di Lax-Milgram. Infatti, dato lo spazio V è sufficiente considerare lo spazio V_a che contiene esattamente gli stessi elementi dello spazio V, ma nel quale il prodotto scalare è dato da

$$(u, v)_{V_a} := a(u, v).$$

È immediato verificare che per ogni funzionale ℓ, lineare e continuo da V in $\mathbb{R}$, lo stesso ℓ risulta essere lineare e continuo anche sullo spazio V_a, e quindi applicando il Teorema di Riesz in V_a avremo che per ogni $\ell \in V'$ esiste una $u_\ell \in V_a \equiv V$ tale che

$$a(u_\ell, v) = (u_\ell, v)_{V_a} = \ell(v) \quad \forall v \in V_a$$

e la u_ℓ sarà proprio la soluzione che cerchiamo. $\square$

Nel caso in cui la a non è simmetrica si richiede un lavoro aggiuntivo. Il primo passo consiste nel ricordare il Teorema delle contrazioni (l'analogo dell'omonimo teorema visto in Analisi).

Teorema delle contrazioni Sia H uno spazio di Hilbert, e sia F una applicazione da H in H tale che

$$\exists\gamma < 1 \text{ tale che } \|F(u) - F(v)\|_H \leq \gamma\|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H \tag{55}$$

(cioè F è una *contrazione* in H: diminuisce le distanze). Allora esiste uno e un solo $\bar{u}$ tale che

$$\bar{u} = F(\bar{u}). \tag{56}$$

La dimostrazione è praticamente identica a quella dell'Analisi: si parte da un u_0 qualsiasi, e si costruisce la successione u_n per ricorrenza

$$u_{n+1} := F(u_n) \qquad \forall n \geq 0. \tag{57}$$

Ovviamente

$$\|u_2 - u_1\|_H = \|F(u_1) - F(u_0)\|_H \le \gamma \|u_1 - u_0\|_H$$

e procedendo nello stesso modo

$$\|u_{n+1} - u_n\|_H = \|F(u_n) - F(u_{n-1})\|_H \le \gamma \|u_n - u_{n-1}\|_H \le ... \le \gamma^n \|u_1 - u_0\|_H$$

ma anche, per ogni n e m interi, ad esempio con $n > m$, si ha

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_H &= \|(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_{m+1} - u_m)\|_H \\
&\le \sum_{r=m}^{n-1} \|u_{r+1} - u_r\|_H \le \sum_{r=m}^{n-1} \gamma^r \|u_1 - u_0\|_H \\
&= \gamma^m \|u_1 - u_0\|_H \sum_{r=0}^{n-m} \gamma^r = \gamma^m \frac{1 - \gamma^{n-m+1}}{1-\gamma} \|u_1 - u_0\|_H \\
&\le \gamma^m \frac{1}{1-\gamma} \|u_1 - u_0\|_H
\end{aligned} \tag{58}$$

Facciamo vedere che la successione così costruita è di Cauchy. Dato che γ^n tende a zero per n che tende all'infinito, per ogni $\varepsilon > 0$ potremo trovare un intero n_ε tale che

$$\gamma^{n_\varepsilon} < \frac{1-\gamma}{\|u_1 - u_0\|_H} \varepsilon. \tag{59}$$

Allora per ogni coppia di interi n e m con $n \ge m \ge n_\varepsilon$ avremo, da (58) e da (59)

$$\|u_n - u_m\|_H \le \gamma^m \frac{1}{1-\gamma} \|u_1 - u_0\|_H \le \gamma^{n_\varepsilon} \frac{1}{1-\gamma} \|u_1 - u_0\|_H \le \varepsilon \tag{60}$$

il che dimostra che la successione è di Cauchy. Dato che H è *completo* esisterà una $\bar{u}$ in H tale che

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - \bar{u}\|_H = 0.$$

Dalla continuità della F (che segue banalmente dalla (55)), passando al limite in entrambi i membri della (57), si ha facilmente la (56).

Inoltre, tale $\bar{u}$ è l'unico elemento che soddisfa la (56). Infatti, se si avesse $u^* = F(u^*)$ per una qualche altra $u^* \ne \bar{u}$, applicando la (55) avremmo

$$\|u^* - \bar{u}\|_H = \|F(u^*) - F(\bar{u})\|_H \le \gamma \|u^* - \bar{u}\|_H,$$

che è impossibile per $\gamma < 1$.

□

Possiamo ora usare il teorema delle contrazioni per dimostrare il Lemma di Lax-Milgram nel caso generale di una a anche non simmetrica.

Cominciamo a definire, per $u \in H$, il funzionale $Au \in H'$, definito da

$$Au(v) := a(u,v)$$

e osserviamo che

$$\|Au\|'_H = \sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{Au(v)}{\|v\|_H} = \sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_H} \leq M\|u\|_H \tag{61}$$

Indichiamo poi con $r : H' \to H$ l'operatore definito dal teorema di Riesz (per intenderci, l'operatore $\varphi \to u_\varphi =: r(\varphi)$) e poi, per ogni $\rho > 0$, definiamo l'applicazione F_ρ, da H in sè

$$F_\rho(u) := u - \rho\, r(Au - \ell) \tag{62}$$

e verifichiamo se, per qualche ρ, l'applicazione F_ρ risulta essere una contrazione. Per ogni coppia di elementi u e v di H, ponendo $w := u - v$ abbiamo

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_H^2 &= \|(u-v) - \rho\, r(Au - Av)\|_H^2 \\ &= \|w - \rho\, r(Aw)\|_H^2 = \|w\|_H^2 - 2\rho\, a(w,w) + \rho^2 \|r(Aw)\|_H^2 \\ &\leq \|w\|_H^2 - 2\rho\alpha\, \|w\|_H^2 + \rho^2 M \|w\|_H^2 = (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M)\|w\|_H^2 \end{aligned} \tag{63}$$

Consideriamo la funzione λ definita da $\lambda(\rho) := 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M$. Si vede facilmente che $\lambda(0) = 1$ e che la derivata $\lambda'(0) = -2\alpha < 0$. In un intorno destro di zero, avremo quindi $\lambda(\rho) < 1$ e quindi, per tali ρ, l'applicazione F_ρ sarà una contrazione.

Per il teorema delle contrazioni, la F_ρ avrà allora un punto fisso, cioè una $\bar{u}$ tale che $\bar{u} = F_\rho(\bar{u})$. Quindi, ricordando la definizione di F_ρ data da (62) avremo $\bar{u} = \bar{u} - \rho\, r(A\bar{u} - \ell)$ da cui facilmente $A\bar{u} - \ell = 0$. Questa è una uguaglianza tra elementi di H' che implica ovviamente

$$a(\bar{u}, v) \equiv A\bar{u}(v) = \ell(v) \tag{64}$$

che ci dice che $\bar{u}$ risolve (40).

□