

Approssimazione di problemi ai limiti per Pde's

Il metodo delle differenze finite

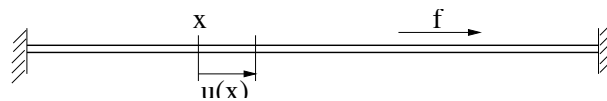
Il metodo alle *differenze finite* è stato il primo metodo introdotto per approssimare la soluzione di problemi ai limiti per equazioni differenziali. Vediamolo su un problema modello semplice monodimensionale (già visto all'inizio del corso):

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

Pur nella sua semplicità, questo problema modella varie applicazioni interessanti. Alcuni esempi:

Applicazioni-1

Barra elastica in trazione (piccoli spostamenti)



f = forza assiale u = spostamento assiale E = coefficiente elastico

$$\sigma = -Eu' \quad (\text{legge di Hooke})$$

$$\sigma' = f \quad (\text{equazione di equilibrio})$$

$$u(0) = 0, u(L) = 0 \quad (\text{condizione al bordo})$$

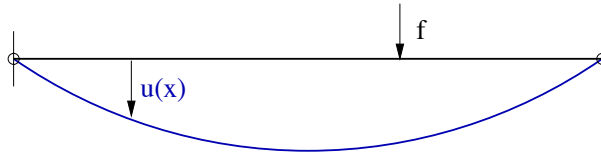
Sostituendo la relazione sforzi-deformazioni nell'equazione di equilibrio si ottiene

$$-u''(x) = f/E, \quad u(0) = 0, u(L) = 0$$

cioè il nostro problema modello.

Applicazioni-2

Filo elastico (piccoli spostamenti)



f = carico verticale u = spostamento verticale

E = coefficiente elastico. Trascuriamo il peso del filo. (In piccoli spostamenti $\varepsilon \simeq u'$)

$$\sigma = -Eu' \quad (\text{legge di Hooke})$$

$$\sigma' = f \quad (\text{equazione di equilibrio})$$

$$u(0) = 0, u(L) = 0 \quad (\text{condizioni al bordo})$$

Questo porta ancora al nostro modello.

Altri esempi di applicazioni.

• *Diffusione del calore*

f = sorgente di calore u = temperatura

k = coefficiente di conduzione del calore

$$q = -ku' \quad (\text{condizione di Fourier})$$

$$q' = f \quad (\text{conservazione dell'energia})$$

$$u(0) = \alpha, u(L) = \beta \quad (\text{condizione al bordo})$$

• *Elettrostatica*

f = densità di carica u = potenziale elettrico E = campo elettrico

ϵ = permittività D = induzione elettrica

$$D = \epsilon E = -\epsilon u'$$

$$D' = f$$

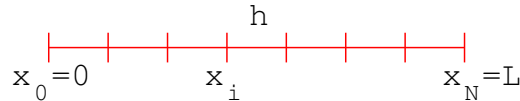
$$u(0) = \alpha, u(L) = \beta$$

In tutti i casi, indicando con u la variabile primale (con significato fisico diverso a seconda dell'applicazione: spostamento assiale, spostamento verticale, temperatura, potenziale elettrico) e sostituendo la legge fisica nell'equazione di equilibrio si arriva sempre al nostro problema modello.

Tornando al nostro problema modello, in alcuni casi si è in grado di integrare due volte il dato $f(x)$ e conseguentemente è possibile trovare la soluzione

esatta. In generale però questo può essere complicato, per cui il problema deve essere risolto numericamente in modo approssimato. Abbandonando l'idea di trovare la soluzione in tutto l'intervallo, ci limitiamo a cercarla solo in alcuni punti di $[0, L]$. A tale scopo suddividiamo l'intervallo $[0, L]$ in un certo numero N di parti (per semplicità di notazioni tutte uguali):

$$N \text{ scelto} \rightarrow h = L/N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = L, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, N - 1)$$



Quindi in ogni punto (detto nodo) interno x_i approssimiamo $u''(x_i)$:

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2} = \text{rapporto incrementale secondo}$$

Richiami: approssimazione di derivate

($h > 0$, u regolare quanto necessario)

1. Sviluppo in serie di Taylor a destra di x_i :

$$\begin{aligned} u(x_i + h) &= u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) + \frac{h^3}{3!} u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{IV}(x_i) + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow u'(x_i) &= \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2} u''(z_i^D) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - O(h) \\ &\text{con } x_i < z_i^D < x_i + h \end{aligned}$$

N.B. $O(h)$ significa che l'errore va a zero con lo stesso ordine di grandezza di h .

Il termine $\frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}$ si chiama *rapporto incrementale destro* e può essere scelto per approssimare u' nel punto x_i :

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \quad \text{errore} = -\frac{h}{2} u''(z_i^D)$$

2. Sviluppo in serie di Taylor a sinistra di x_i (l'incremento è $-h$):

$$\begin{aligned} u(x_i - h) &= u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) - \frac{h^3}{3!} u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{IV}(x_i) + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow u'(x_i) &= \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2} u''(z_i^S) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + O(h) \\ &\text{con } x_i - h < z_i^S < x_i \end{aligned}$$

Il termine $\frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h}$ si chiama *rapporto incrementale sinistro*.

Anch'esso può essere scelto per approssimare u' nel punto x_i :

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} \quad \text{errore} = \frac{h}{2} u''(z_i^S)$$

Se adesso si calcolano la differenza e la somma di 1. e 2., si ha:

$$\begin{aligned} 1. - 2. &\rightarrow u(x_i + h) - u(x_i - h) = 2h u'(x_i) + 2\frac{h^3}{3!} u'''(x_i) + O(h^5) \Rightarrow \\ \Rightarrow u'(x_i) &= \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} u'''(z_i^C) \quad x_i - h < z_i^C < x_i + h \end{aligned}$$

Il termine $\frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h}$ si chiama *rapporto incrementale centrale* e fornisce un'altra approssimazione di u' nel punto x_i :

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} \quad \text{errore} = -\frac{h^2}{6} u'''(z_i^C)$$

Si nota come in questo caso l'errore, per $h \rightarrow 0$, vada a zero come h^2 , cioè più velocemente che nei due casi precedenti. Questa approssimazione è quindi più precisa (u' coincide col rapporto incrementale se $u''' = 0$, cioè se u è un polinomio di secondo grado, mentre nei casi precedenti u' coincide col rapporto incrementale se u è un polinomio di primo grado).

$$\begin{aligned} 1. + 2. &\rightarrow u(x_i + h) + u(x_i - h) = 2u(x_i) + h^2 u''(x_i) + \frac{h^4}{4!} 2u^{IV}(x_i) + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow u''(x_i) &= \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{4!} 2u^{IV}(z_i^C) \quad x_i - h < z_i^C < x_i + h \end{aligned}$$

Il termine $\frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2}$ si chiama *rapporto incrementale secondo* e fornisce una approssimazione di u'' nel punto x_i :

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} \quad \text{errore} = -\frac{h^2}{12} u^{IV}(z_i^C).$$

Osserviamo che u'' coincide col rapporto incrementale se $u^{IV} = 0$, ossia se u è un polinomio di terzo grado.

Quindi tornando al problema e sostituendo u'' in ogni punto interno della suddivisione con il rapporto incrementale secondo si ottiene:

$$\forall i = 1, \dots, N-1 \quad \begin{cases} -\frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} = f(x_i) - \frac{h^2}{12} u^{IV}(z_i^C) & (*) \\ u(x_0) = u(x_N) = 0 \end{cases}$$

Per poter risolvere il sistema (*) dovremmo conoscere la u in ogni punto x_i , ma significherebbe conoscere la soluzione del problema. Indichiamo quindi con u_i valori approssimati di $u(x_i)$, che cerchiamo come soluzione del seguente sistema:

$$u(x_i) \simeq u_i \quad \Rightarrow \quad (P_h) \quad \begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) & i = 1, \dots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

Il sistema (P_h) si scrive in forma matriciale come

$$A_h \underline{U}_h = \underline{F}_h, \tag{1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_h} \underbrace{\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}}_{\underline{U}_h} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{F}_h}$$

Come al solito, ci si deve assicurare innanzitutto che il problema (P_h) sia ben posto, cioè che abbia soluzione unica e valga la dipendenza continua dai dati.

- (P_h) ha soluzione unica? Sì perché A_h è simmetrica e definita positiva (in particolare $\det A_h > 0$)
- (P_h) è stabile? Sì, se vale la dipendenza continua dai dati, cioè:

$$\exists C > 0 : \|\underline{U}_h\| \leq C \|\underline{F}_h\| \quad \text{per qualche norma di vettore.}$$

Esplicitando la soluzione del sistema (1) si ottiene

$$\underline{U}_h = A_h^{-1} \underline{F}_h \rightarrow \|\underline{U}_h\| \leq \|A_h^{-1}\| \|\underline{F}_h\|.$$

Se la $\|A_h^{-1}\|$ è limitata indipendentemente da h si ha dipendenza continua dai dati, con $C = \|A_h^{-1}\|$.

Si può dimostrare che:

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \frac{1}{8} \quad (\|M\|_\infty = \max_i \sum_j |m_{ij}|)$$

quindi il problema (P_h) è stabile ($C = \frac{1}{8}$)

Il problema (P_h) ha dunque una sola soluzione e il problema è ben posto.



La domanda che ci poniamo ora è: la soluzione approssimata \underline{U}_h è “vicina” alla soluzione esatta?

- La soluzione esatta è una funzione, definita su tutto l’intervallo $[0, L]$, mentre \underline{U}_h è un vettore di numeri
- La soluzione esatta ha la derivata seconda uguale a f su tutto l’intervallo $[0, L]$, mentre \underline{U}_h verifica un’equazione alle differenze in alcuni punti di $[0, L]$
- Sembra naturale confrontare (con carta e penna) i numeri u_1, u_2, \dots, u_{N-1} con i valori $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_{N-1})$ della soluzione esatta nei punti x_1, x_2, \dots, x_{N-1} . Si deve cioè studiare l’errore commesso.

Studio dell’errore

Si deve studiare l’errore commesso sostituendo $u''(x_i)$ in ogni nodo x_i con il rapporto incrementale secondo:

$$\forall x_i \quad u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2}$$

Come si vede da (*), nel fare questo abbiamo sostituito l’equazione $-u''(x_i) = f(x_i)$ con:

$$\frac{-u(x_i - h) + 2u(x_i) - u(x_i + h)}{h^2} = f(x_i) + \epsilon_i(h)$$

essendo $\epsilon_i(h) = -\frac{h^2}{12}u^{IV}(\xi_i)$, $x_i - h < \xi_i < x_i + h$

Posto:

$$\underline{U} = (u(x_1), \dots, u(x_N))^t, \quad \underline{\epsilon}_h = (\epsilon_1(h), \dots, \epsilon_N(h))^t$$

si vede che \underline{U} risolve il problema:

$$A_h \underline{U} = \underline{F}_h + \underline{\epsilon}_h \quad (2)$$

ϵ_h è chiamato *Errore di consistenza*
e misura l’errore che si commette quando si applica uno schema numerico alla soluzione esatta

Intuitivamente, deve essere “piccolo” o, più precisamente, deve tendere a zero quando il passo di discretizzazione $h \rightarrow 0$.

Vediamo se questo è sufficiente a garantire convergenza della soluzione approssimata alla soluzione esatta, cioè,

$$\|\underline{U}_h - \underline{U}\| \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

(per qualche norma di vettore $\|\cdot\|$).

Richiami su norme di vettori e matrici

Un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ può essere misurato in varie norme. Ex:

$$\|\underline{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|\underline{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|\underline{v}\|_\infty = \max_i |v_i|$$

In dimensione finita (qui n) sono tutte equivalenti:

$$\|\underline{v}\|_\infty \leq \|\underline{v}\|_1 \leq n\|\underline{v}\|_\infty, \quad \|\underline{v}\|_\infty \leq \|\underline{v}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\underline{v}\|_\infty$$

Questo **non è vero in dimensione infinita** (le costanti di equivalenza dipendono dalla dimensione n)

Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ con norma $\|\underline{v}\|_*$. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si chiama *norma naturale* di A la seguente:

$$\|A\|_* = \sup_{\underline{v} \neq 0} \frac{\|A\underline{v}\|_*}{\|\underline{v}\|_*}$$

Proprietà di $\|A\|_*$:

- $\|A\underline{v}\|_* \leq \|A\|_* \|\underline{v}\|_* \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$
- $\|AB\|_* \leq \|A\|_* \|B\|_*, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|\underline{v}\|_* = \|\underline{v}\|_2 \quad \longrightarrow \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \quad (\rho(M) = \max |\lambda(M)|)$$

$$\|\underline{v}\|_* = \|\underline{v}\|_\infty \quad \longrightarrow \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|\underline{v}\|_* = \|\underline{v}\|_1 \quad \longrightarrow \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

Fine richiami sulle norme

Nel nostro caso l'errore di consistenza in ogni nodo è $\epsilon_{hi} = -\frac{h^2}{12}u^{IV}(\xi_i)$.
Quindi:

$$\begin{aligned}\|\epsilon_h\|_\infty &\leq \frac{1}{12} \max_{x \in [0,L]} |u^{IV}(x)|h^2 = O(h^2) \\ \|\epsilon_h\|_2 &\leq \sqrt{N}\|\epsilon_h\|_\infty \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [0,L]} |u^{IV}(x)|h^2 \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{h}} = O(h^{3/2}) \\ \|\epsilon_h\|_1 &\leq N\|\epsilon_h\|_\infty \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [0,L]} |u^{IV}(x)|h^2 \frac{L}{h} = O(h)\end{aligned}$$

e dunque l'errore di consistenza tende a zero, al tendere a zero di h , in ognuna di queste norme, ma con velocità diversa.

Tornando al nostro errore: facendo la differenza fra il problema (2) e il problema (1) si ottiene:

$$\begin{aligned}A_h \underline{U} - A_h \underline{U}_h &= \epsilon_h \implies \underline{U} - \underline{U}_h = A_h^{-1} \epsilon_h \\ \implies \|\underline{U} - \underline{U}_h\| &= \|A_h^{-1} \epsilon_h\| \leq \|A_h^{-1}\| \|\epsilon_h\|.\end{aligned}$$

Ora, l'errore tenderà a zero se e solo se $\|A_h^{-1}\| \leq C$, con C costante indipendente da h . Nel nostro caso sappiamo che si ha stabilità nella norma $\|\cdot\|_\infty$ ($\|A_h^{-1}\|_\infty \leq 1/8$), quindi si avrà

$$\|\underline{U} - \underline{U}_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|\epsilon_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \frac{h^2}{12} \|u^{IV}\|_\infty = C h^2.$$

Riassumendo: la soluzione approssimata converge alla soluzione esatta nella norma del max, e l'ordine di convergenza è 2 (l'errore tende a zero come h^2).

Più in generale, la convergenza di uno schema numerico si dimostra usando il Teorema di Lax, che può essere concisamente enunciato così:

Teorema di LAX

$$\textit{Consistenza} + \textit{Stabilità} \implies \textit{Convergenza}$$

Più precisamente: Se il problema approssimato è **consistente e stabile**, allora la soluzione approssimata converge, quando $h \rightarrow 0$, alla soluzione esatta **nella norma in cui si ha la stabilità**, e l'ordine di convergenza è uguale all'ordine di consistenza, ossia all'ordine di convergenza di ϵ_h (a 0).

L'estensione del metodo delle differenze finite a problemi differenziali in 2 dimensioni diventa complicato se il dominio non è un rettangolo (o unione di rettangoli), e anche se ci sono condizioni ai limiti di Neumann. Molto più agevole è l'utilizzo del *Metodo degli elementi finiti*.

Metodo degli Elementi Finiti

Il Metodo degli Elementi Finiti (*FEM*) fa parte dei metodi cosiddetti di **Galerkin**, che sono metodi per approssimare la soluzione di problemi variazionali. In astratto, dato il problema

$$(PVar) \begin{cases} \text{trovare } u \in V, \text{ soluzione di:} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

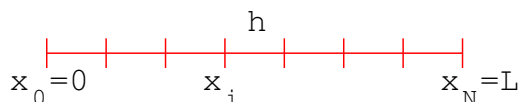
si approssima lo spazio V in cui si cerca la soluzione u con uno spazio di dimensione finita $M : V \simeq V_M$ e ci cerca una approssimazione di u nello spazio V_M . Diverse scelte di V_M danno luogo a diversi metodi di Galerkin. Nel Metodo degli Elementi Finiti lo spazio V_M è costituito da funzioni polinomiali a tratti. Vediamo di capire come si procede partendo sempre dal problema modello (P), la cui formulazione variazionale è:

$$(PV) \begin{cases} \text{trovare } u \in H_0^1(0, L), \text{ soluzione di:} \\ \int_0^L u' v' dx = \int_0^L f v \quad \forall v \in H_0^1(0, L) \end{cases}$$

Sappiamo che il Lemma di *Lax-Milgram* è verificato quindi si ha esistenza e unicità di u , e stabilità.

Per approssimare (PV) procediamo come fatto precedentemente per introdurre il metodo delle differenze finite:

$$N \text{ scelto} \rightarrow h = L/N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = L, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, N - 1)$$



L'intervallo viene quindi suddiviso in N sottointervalli I_1, I_2, \dots, I_N , ognuno di lunghezza h . Approssimiamo poi lo spazio $H_0^1(0, L)$ con uno spazio di dimensione finita V_h , costituito da funzioni continue e polinomiali su ogni I_i :

$$k \geq 1 \rightarrow V_h = \{v_h \in C^0[0, L] : v_h|_{I_i} \in P_k(I_i) \forall I_i, v_h(0) = v_h(L) = 0\}$$

Si verifica che V_h è un sottospazio di $H_0^1(0, L)$ (**Esercizio a casa**. Suggerimento: si deve dimostrare che una qualunque $v_h \in V_h$ sta in $L^2([0, L])$, e la sua derivata debole sta in $L^2([0, L])$).

Scriviamo (PV) in V_h , sottospazio di $H_0^1(0, L)$:

$$(PV)_h \begin{cases} \text{trovare } u_h \in V_h, \text{ soluzione di:} \\ \int_0^L u_h' v_h' dx = \int_0^L f v_h \quad \forall v_h \in V_h \subset H_0^1(0, L) \end{cases}$$

Poiché V_h è un sottospazio di $H_0^1(0, L)$, il Lemma di *Lax-Milgram* è automaticamente verificato \Rightarrow esistenza, unicità e stabilità :

$$\|u'_h\|_0 \leq C_p \|f\|_0 \quad (\text{come per } (PV))$$

Inoltre, $(PV)_h$ è consistente, e si ha errore di consistenza zero. Infatti, poiché $V_h \subset H_0^1(0, L)$, la soluzione u di (PV) verifica

$$\int_0^L u' v'_h dx = \int_0^L f v_h \quad \forall v_h \in V_h \subset H_0^1(0, L).$$

Conseguentemente si ha la proprietà (chiamata *ortogonalità di Galerkin*)

$$(*) \quad \int_0^L (u - u_h)' v'_h dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Essendo quindi il metodo stabile e consistente, per il Teorema di Lax si ha convergenza (nella norma in cui si ha la stabilità, che in questo caso è $\|v'\|_0$):

$$\begin{aligned} \|(u - u_h)'\|_0^2 &= \int_0^L (u - u_h)' (u - u_h)' = \underbrace{\int_0^L (u - u_h)' (u - v_h)' \leq}_{\text{per } (*)} \\ &\leq \underbrace{\|(u - u_h)'\|_0 \|(u - v_h)'\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \Rightarrow \\ &\|(u - u_h)'\|_0 \leq \inf_{v_h \in V_h} \|(u - v_h)'\|_0 \quad (**) \end{aligned}$$

Esempio: Vediamo ora un esempio di utilizzo del metodo degli elementi finiti per il problema $(PV)_h$. Consideriamo il caso di Elementi finiti lineari:

$$k = 1 \rightarrow V_h = \{v_h \in C^0[0, L] : v_h|_{I_i} \in P_1(I_i) \forall I_i, v_h(0) = v_h(L) = 0\}$$

cioè, la generica funzione $v_h \in V_h$ è una funzione lineare a tratti e continua, e tale che $v_h(0) = v_h(L) = 0$.

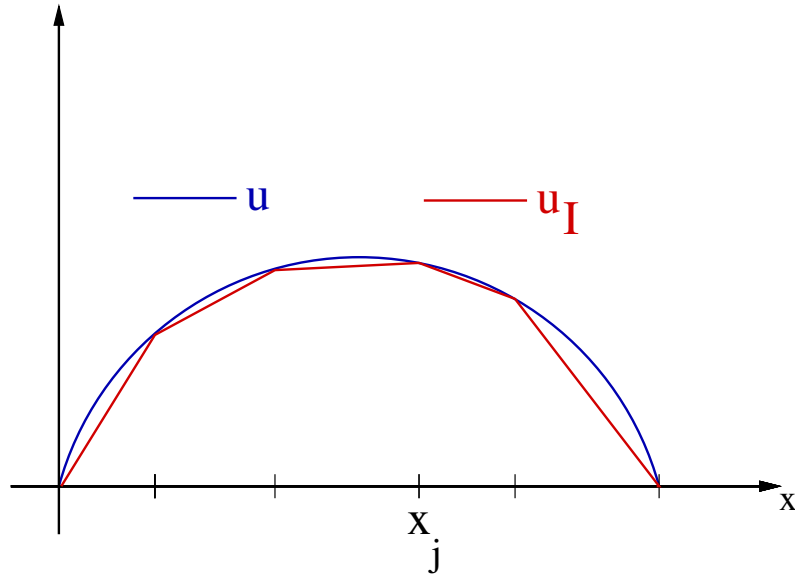
Il risultato qualitativo **(**)** permette di calcolare quantitativamente l'errore commesso in funzione del passo di discretizzazione h . Infatti: possiamo scegliere in **(**)** $v_h = u_I$, con $u_I =$ interpolata di u in V_h , definita da:

$$u_I \in V_h : \quad u_I(x_j) = u(x_j) \quad j = 0, N$$

per cui si ha

$$(**) \Rightarrow \|(u - u_h)'\|_0 \leq \|(u - u_I)'\|_0.$$

L'errore di approssimazione che vogliamo stimare è quindi maggiorato dall'errore di interpolazione, e questo può essere calcolato.



Errore di interpolazione

Teorema 1. Sia $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione “regolare” e sia w_I la sua interpolata lineare a tratti e continua rispetto a una suddivisione di $[a, b]$ in N intervalli di lunghezza h . Si ha il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \|w - w_I\|_{L^2(a,b)} &\leq C h^2 \\ \|(w - w_I)'\|_{L^2(a,b)} &\leq C h \end{aligned}$$

con C costante positiva indipendente da h .

Dimostrazione Innanzitutto mostriamo che

$$\|w - w_I\|_{L^2(a,b)} \leq C h \|(w - w_I)'\|_{L^2(a,b)}.$$

L'errore di interpolazione $e(x) := w(x) - w_I(x)$, per definizione di interpolata, è una funzione che si annulla in ogni nodo: $e(x_j) = 0$, $j = 0, \dots, N$. Su un generico intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, dal 1° teorema fondamentale del calcolo integrale

si ha:

$$\begin{aligned}
 e(x) &= \int_{x_i}^x e'(s) ds \quad \text{da cui, elevando al quadrato} \\
 e^2(x) &= \left(\int_{x_i}^x e'(s) ds \right)^2 \quad \text{poi integrando su } [x_i, x_{i+1}] \\
 \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^2(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^x e'(s) ds \right)^2 dx \quad \text{via Cauchy-Schwarz} \\
 &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|e'\|_{L^2(x_i, x)}^2 \|1\|_{L^2(x_i, x)}^2 dx \\
 &\leq \|e'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx = \frac{h^2}{2} \|e'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2
 \end{aligned}$$

Sommando sugli intervalli si ha quindi

$$\|e\|_{L^2(a, b)}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^2(x) dx \leq \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \|e'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 = \frac{h^2}{2} \|e'\|_{L^2(a, b)}^2,$$

da cui

$$\|w - w_I\|_{L^2(a, b)} \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \|(w - w_I)'\|_{L^2(a, b)}.$$

Per quanto riguarda l'errore $\|(w - w_I)'\|_{L^2(a, b)}$, sempre su un generico intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ si ha $e(x_i) = e(x_{i+1}) = 0$. Per il Teorema di Rolle esiste un punto $z \in]x_i, x_{i+1}[$ in cui $e'(z) = 0$. Usando il 1° Teorema fondamentale del calcolo integrale e il fatto che $w_I'' = 0$ in $[x_i, x_{i+1}]$, si ha

$$e'(x) = \int_z^x e''(s) ds = \int_z^x w''(s) ds \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Da questa relazione, procedendo come prima, quadrando, integrando su $[x_i, x_{i+1}]$ e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (e'(x))^2 dx \leq h^2 \|w''\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2$$

e sommando sugli intervalli

$$\|(w - w_I)'\|_{L^2(a, b)} \leq h \|w''\|_{L^2(a, b)}$$

□

Usando questo risultato nella (***) si ha una stima qualitativa dell'errore di approssimazione:

$$\|(u - u_h)'\|_0 \leq C h \|u''\|_0.$$

Dopo aver visto che il problema approssimato $(PV)_h$ ha una soluzione unica, e dopo avere stimato l'errore commesso con l'approssimazione usata, vediamo come si risolve il problema $(PV)_h$. Come si arriva a un sistema lineare risolubile su computer?

Innanzitutto osserviamo che V_h è uno spazio di dimensione finita, e precisamente

$\dim V_h =$ numero di punti interni della suddivisione $(= N - 1)$. Infatti,

una funzione di V_h è univocamente individuata dai suoi valori nei punti interni (nodi) della suddivisione.

Quindi V_h ammette una base, ossia un insieme di $N - 1$ funzioni linearmente indipendenti tali che

$$V_h = \text{span}\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{N-1}(x)\}$$

Una base conveniente per i conti da effettuare è la seguente:

$$\forall j, \varphi_j(x) \in V_h : \varphi_j|_{I_s} \in P_1(I_s) \forall s, \quad \varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

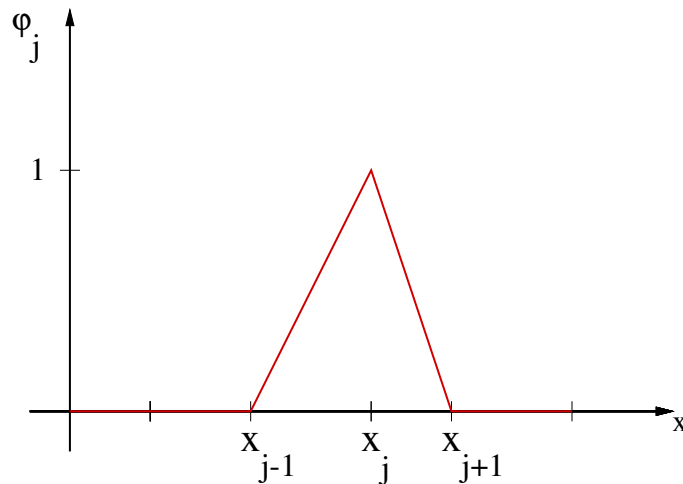


Figura 1: generica funzione di base

(Esercizio: verificare l'indipendenza lineare)

Ogni funzione $v_h \in V_h$ si scrive quindi come combinazione lineare delle $\varphi_j(x)$.
In particolare:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} u_j \varphi_j(x) \quad (u_j = u_h(x_j))$$

Sostituendo in $(PV)_h$ si ottiene:

$$\sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_0^L \varphi_j'(x) v_h'(x) dx = \int_0^L f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h$$

e poiché l'equazione è verificata se e solo se è verificata sulla base, il problema approssimato finale è:

$$\begin{cases} \text{trovare } u_1, u_2, \dots, u_{N-1} \text{ soluzione di} \\ \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_0^L \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi_i(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

che in forma matriciale si scrive

$$A_h \underline{U}_h = \underline{F}_h$$

con

$$A_h = \{a_{ij}\} = \int_0^L \varphi_j' \varphi_i' \quad \underline{F}_h = \{b_i\} = \int_0^L f \varphi_i$$

Si vede che $\int_0^L \varphi_j' \varphi_i' \neq 0$ solo se $|i - j| < 2$, per cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{i-1}' \varphi_i' &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1}' \varphi_i' = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h} \\ \int_0^L \varphi_{i+1}' \varphi_i' &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}' \varphi_i' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h} \\ \int_0^L \varphi_i' \varphi_i' &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i' \varphi_i' + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i' \varphi_i' = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) = \frac{2}{h} \end{aligned}$$

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{F}_h = \begin{bmatrix} \int_0^L f \varphi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \int_0^L f \varphi_{N-1} \end{bmatrix}$$

La matrice è analoga a quella ottenuta tramite le differenze finite. Il termine noto invece è diverso tranne nel caso $f = costante$, nel qual caso i 2 schemi coincidono.

Nota sull'errore di consistenza: L'errore di consistenza è nullo se $\int f \varphi_i$ è calcolato esattamente, altrimenti va studiato l'errore che si commette approssimando l'integrale.

Il Metodo degli Elementi Finiti in 2D

Consideriamo un generico problema variazionale in forma astratta:

$$(PVar) \quad \text{trovare } u \in V \text{ tale che } a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V, \quad (3)$$

che verifica il Lemma di Lax-Milgram (quindi, esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati). Come già visto nel caso monodimensionale, con il metodo degli elementi finiti lo spazio V viene approssimato con uno spazio di dimensione finita, costituito da funzioni continue e polinomiali a tratti. Per semplicità assumiamo che il dominio computazione Ω sia un poligono convesso. Sia \mathcal{T}_h una decomposizione di Ω in triangoli (ved. figura):

$$\mathcal{T}_h = \text{triangolazione o mesh di } \Omega : \Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

$$h = \max_T \text{diam}(T) \quad \text{diam}(T) = \text{lato piú lungo}$$

(h rappresenta la “finezza” della mesh). Introduciamo lo spazio di elementi finiti

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad k \geq 1$$

dove $\mathbb{P}_k(T)$ è lo spazio di polinomi di grado $\leq k$ su T .

NOTA: Poiché in tutti i problemi di cui ci occupiamo lo spazio V è sempre del tipo $H^1(\Omega)$, si verifica facilmente che

$$V_h^k \subset V \simeq H^1 \Leftrightarrow V_h^k \subset C^0.$$

Osserviamo inoltre che, se nello spazio V sono presenti condizioni di Dirichlet, anche nello spazio approssimato V_h^k queste dovranno essere incluse, come vedremo su alcuni esempi.

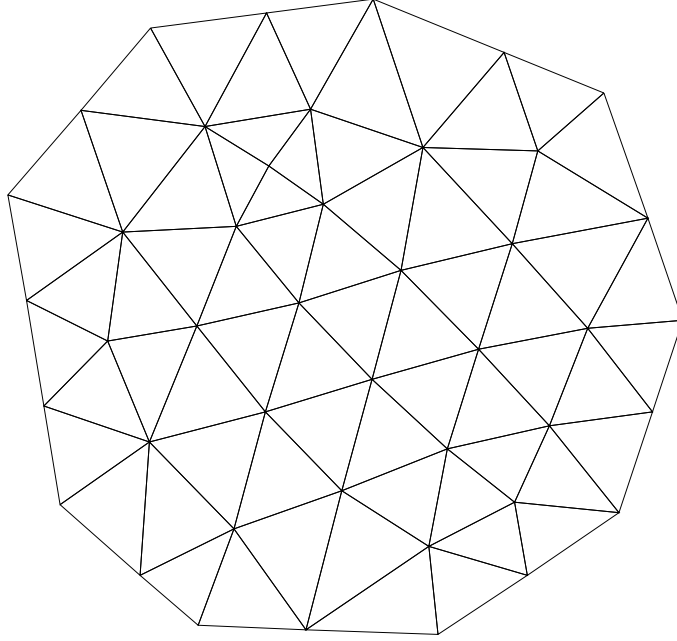


Figura 2: esempio di triangolazione

Il problema approssimato di (3) è quindi:

$$(PVar)_h \quad \text{trovare } u_h \in V_h^k \text{ tale che } a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (4)$$

Lemma 1. *Il problema (4) ha un'unica soluzione e si ha dipendenza continua dai dati.*

Dimostrazione Poiché per il problema (3) tutte le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram sono verificate, l'inclusione $V_h^k \subset V$ garantisce che tutte le ipotesi sono verificate anche per il problema (4). Quindi si ha esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati esattamente come per (3). In particolare, se α è la costante di ellitticità di $a(\cdot, \cdot)$, e C_ℓ la costante di continuità di $\ell(\cdot)$ si ha

$$\|u_h\|_V \leq \frac{C_\ell}{\alpha}.$$

□

Nota: Confrontando il problema continuo (3) e il problema approssimato (4) si vede che non sono state introdotte approssimazioni né della forma bilineare né del funzionale. Inoltre, sempre grazie all'inclusione $V_h^k \subset V$, la soluzione u di (3) verifica anche

$$a(u, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^k \subset V,$$

cioè, l'errore di consistenza è pari a zero. Ne consegue, facendo la differenza con (4), che

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h^k \subset V. \quad (5)$$

La relazione (5) (già vista nel caso particolare del problema monodimensionale trattato precedentemente) si chiama **ortogonalità di Galerkin**. Grazie a (5) si ottiene la seguente *stima qualitativa* per l'errore.

Lemma 2. (Lemma di Céa) *Sia u la soluzione di (3), e sia u_h la soluzione del problema approssimato (4). Si ha il seguente risultato:*

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_V, \quad (6)$$

con C =costante indipendente da h .

Dimostrazione Usando l'ellitticità, l'ortogonalità di Galerkin (5) (due volte), e la continuità di $a(\cdot, \cdot)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) = a(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h^k, \end{aligned}$$

da cui il risultato, con $C = M/\alpha$. □

Corollario 1. *Conseguenza del risultato (6) del Lemma di Céa: l'errore, nella norma di V , può essere stimato tramite l'errore di interpolazione (sempre nella norma di V). Infatti, da (6) segue che*

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - u_I\|_V.$$

Si può dimostrare (ma qui ometteremo la dimostrazione) la seguente stima per l'errore di interpolazione:

$$\|u - u_I\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}, \quad \|\nabla u - \nabla u_I\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^k$$

con C costante positiva indipendente da h . Per l'errore di approssimazione si ottiene quindi

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^k$$

In particolare, per elementi finiti lineari a tratti si avrà, come nel caso monodimensionale,

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch,$$

vale a dire, la soluzione approssimata u_h converge alla soluzione esatta u , per $h \rightarrow 0$, nella norma dello spazio V , e la velocità di convergenza è pari a 1.

Elementi finiti lineari

Per chiarire quanto esposto, scegliamo di approssimare la soluzione di (3) con elementi finiti lineari a tratti. Fissiamo quindi

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (7)$$

e il problema (4) diventa

$$\text{trovare } u_h \in V_h^1 \text{ tale che } a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^1. \quad (8)$$

Proposizione 1. *Una generica funzione $v_h \in V_h^1$ è univocamente individuata dai suoi valori nei vertici dei triangoli della mesh.*

Dimostrazione Si procede triangolo per triangolo. La restrizione di v_h a un generico triangolo è un polinomio di grado 1, che è univocamente individuato dai valori nei tre vertici del triangolo. Dati quindi i valori nei vertici di \mathcal{T}_h si individua una funzione v_h lineare in ogni triangolo. Resta da dimostrare che tale funzione è continua. A tale scopo, siano T_1 e T_2 due triangoli con un lato e in comune, e siano v_h^1 e v_h^2 i polinomi di grado 1 individuati, su T_1 e T_2 , dai valori nei tre vertici. Sul lato e la differenza $v_h^1 - v_h^2$ è un polinomio di grado 1 nullo agli estremi del lato. Quindi $v_h^1 - v_h^2 \equiv 0$ su e , e la continuità è dimostrata. \square

Posto quindi $N =$ numero di vertici di \mathcal{T}_h , si ha

$$\dim V_h^1 = \text{numero di vertici di } \mathcal{T}_h = N.$$

Essendo V_h^1 uno spazio di dimensione finita, ammette una base, ossia un sistema di N funzioni linearmente indipendenti $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ tali che

$$V_h^1 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}.$$

Una scelta comoda per i conti da effettuare è la seguente (vedasi Fig. 3)

$$\varphi_i(x, y)|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T, \quad \text{e} \quad \varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Ogni funzione di V_h^1 può essere espressa come combinazione lineare delle funzioni di base. In particolare, la soluzione approssimata si scrive come:

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x, y)$$

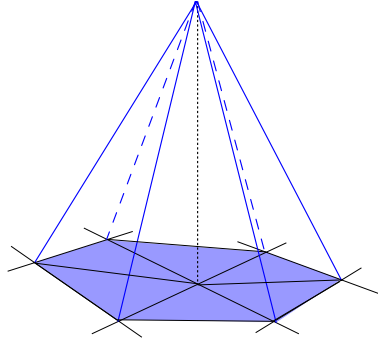


Figura 3: Esempio di funzione di base

con i coefficienti u_j (incogniti), e per definizione:

$$u_j = u_h(x_j, y_j) \quad i = 1, N.$$

Sostituendo l'espressione di u_h nel problema (8) si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trovare } u_1, u_2, \dots, u_N \text{ tali che :} \\ \sum_{j=1}^N u_j a(\varphi_j, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^1. \end{array} \right. \quad (9)$$

L'equazione in (9) deve valere per tutte le funzioni di V_h^1 , e questo avviene se e solo se l'equazione è verificata per ogni funzione di base. Quindi si ottiene il sistema lineare finale di N equazioni in N incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trovare } u_1, u_2, \dots, u_N \text{ tali che :} \\ \sum_{j=1}^N u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = \ell(\varphi_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right. \quad (10)$$

Il sistema (10) si può scrivere in forma matriciale come

$$\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{B}}$$

con

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} &= \{A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)\}, i, j = 1, \dots, N, \\ \underline{\mathbf{B}} &= \{b_i = \ell(\varphi_i)\}, \underline{\mathbf{U}} = \{u_i\}, i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Il calcolo della matrice e del termine noto viene fatto procedendo per elementi. Infatti, poiché sia i coefficienti della matrice sia il termine noto sono

degli integrali sul dominio $\Omega = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$, grazie alla ben nota proprietà degli integrali (l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali) si può scrivere

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_T(\varphi_j, \varphi_i), \quad b_i = \ell(\varphi_i) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \ell_T(\varphi_i),$$

in cui $a_T(\varphi_j, \varphi_i)$ e $\ell_T(\varphi_i)$ sono le restrizioni di a e ℓ al triangolo generico e sono dette matrici elementari. Matrice e termine noto globali possono essere costruiti calcolando prima le matrici elementari ($\forall T \in \mathcal{T}_h$) e sommando poi i contributi di ogni T . Questo modo di procedere per elementi, tipico degli elementi finiti, si chiama *assemblaggio* e sarà chiarito in dettaglio nel prossimo esempio.

Applicazione a un problema modello

Consideriamo il problema di Dirichlet omogeneo per l'operatore di Laplace (*ES1* del capitolo precedente):

$$(ES1) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

la cui formulazione variazionale è:

$$(PV_1) \begin{cases} \text{trovare } u \in H_0^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (11)$$

Essendo le condizioni al bordo di Dirichlet *forzate*, esse vanno imposte nello spazio di elementi finiti (7), che quindi diventa:

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ su } \partial\Omega\}, \quad (12)$$

e il problema approssimato sarà

$$(PV_1)_h \begin{cases} \text{trovare } u_h \in V_h^1 \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h^1 \end{cases} \quad (13)$$

Poiché le funzioni di V_h^1 sono note sul bordo di Ω , la dimensione di V_h^1 è pari al numero dei **sol**i vertici interni di \mathcal{T}_h :

$$\dim V_h^1 = \text{numero di vertici interni della mesh} =: NP$$

e si avrà

$$V_h^1 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{NP}\},$$

con le funzioni di base definite esattamente come prima. Procedendo allo stesso modo, si perviene al seguente sistema lineare di NP equazioni in NP incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trovare } u_1, u_2, \dots, u_{NP} \text{ tali che :} \\ \sum_{j=1}^{NP} u_j \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\nabla}\varphi_j \cdot \underline{\nabla}\varphi_i \, dx dy}_{A_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i \, dx dy}_{b_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, NP. \end{array} \right. \quad (14)$$

La matrice \mathbf{A} si chiama *matrice di stiffness* e ha molti coefficienti nulli. Precisamente, se P_i e P_j non sono vertici dello stesso triangolo, allora $A_{ij} = 0$. Vediamo come costruirla a partire dalle matrici di stiffness elementari, grazie al fatto che

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\nabla}\varphi_j \cdot \underline{\nabla}\varphi_i = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \underline{\nabla}\varphi_j \cdot \underline{\nabla}\varphi_i.$$

Calcolo matrici di stiffness elementari

Siano V_i, V_j, V_k i vertici del (generico) triangolo T . Su T la matrice di stiffness elementare che dobbiamo calcolare è data da:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \int_T \underline{\nabla}\varphi_i \cdot \underline{\nabla}\varphi_i & \int_T \underline{\nabla}\varphi_i \cdot \underline{\nabla}\varphi_j & \int_T \underline{\nabla}\varphi_i \cdot \underline{\nabla}\varphi_k \\ & \int_T \underline{\nabla}\varphi_j \cdot \underline{\nabla}\varphi_j & \int_T \underline{\nabla}\varphi_j \cdot \underline{\nabla}\varphi_k \\ \text{symm.} & & \int_T \underline{\nabla}\varphi_k \cdot \underline{\nabla}\varphi_k \end{pmatrix}$$

Gli indici i, j, k sono i numeri globali in \mathcal{T}_h dei tre vertici di T ; per semplicità li chiamiamo 1, 2, 3 rispettivamente, e indichiamo con ℓ_r il lato opposto al vertice $V_r = (x_r, y_r)$, ($r = 1, 2, 3$) come nella Fig. 4.

Per comodità di scrittura poniamo anche $\psi_1 = \varphi_i|_T$, $\psi_2 = \varphi_j|_T$, $\psi_3 = \varphi_k|_T$, per cui si ha $\psi_r(x_s, y_s) = \delta_{r,s}$ (simbolo di Kronecker) per $r, s = 1, 2, 3$. Quindi calcoliamo

$$A_{rs} = \int_T \underline{\nabla}\psi_s \cdot \underline{\nabla}\psi_r \quad r, s = 1, 2, 3$$

dove

$$\begin{array}{l} \psi_1 \in \mathbb{P}_1(T) : \quad \psi_1(x_1, y_1) = 1 \quad \psi_1(x_2, y_2) = \psi_1(x_3, y_3) = 0 \\ \psi_2 \in \mathbb{P}_1(T) : \quad \psi_2(x_2, y_2) = 1 \quad \psi_2(x_1, y_1) = \psi_2(x_3, y_3) = 0 \\ \psi_3 \in \mathbb{P}_1(T) : \quad \psi_3(x_3, y_3) = 1 \quad \psi_3(x_1, y_1) = \psi_3(x_2, y_2) = 0 \end{array}$$

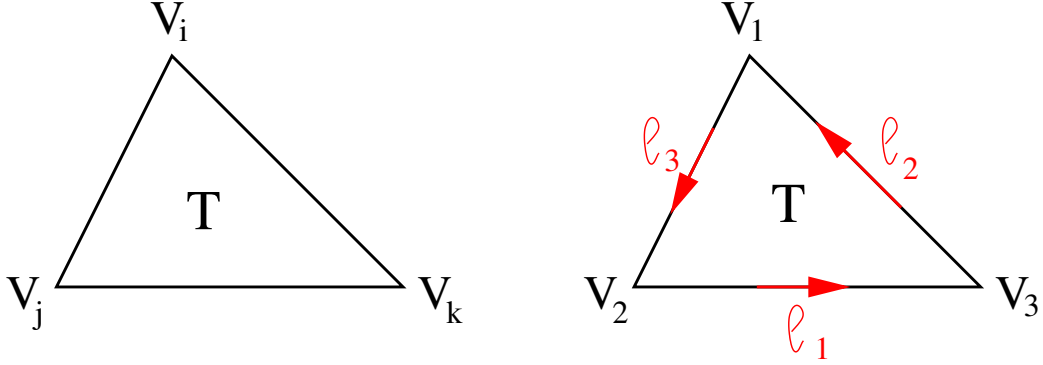


Figura 4: Numerazione locale sul generico triangolo

Per ogni ψ_r dobbiamo calcolare il gradiente, che possiamo fare tramite considerazioni geometriche. Consideriamo ad esempio la funzione ψ_1 : essa è un polinomio di grado 1 (un piano) identicamente nullo sul lato ℓ_1 e avente valore 1 nel vertice V_1 . Si tratta quindi di una funzione lineare che passa dal valore 0 al valore 1 su un intervallo di lunghezza $H_1 =$ altezza relativa al lato ℓ_1 . Il suo gradiente sarà un vettore costante, di lunghezza $1/H_1$, diretto come la normale al lato ℓ_1 e orientato verso V_1 . Quindi, indicando con \underline{n}^1 il versore normale uscente al lato ℓ_1 , si avrà $\underline{\nabla}\psi_1 = -\frac{\underline{n}^1}{|H_1|}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per la lunghezza $|\ell_1|$ di $\underline{\ell}_1$ otteniamo $\underline{\nabla}\psi_1 = -\frac{\underline{n}^1|\ell_1|}{2|T|}$. Le stesse considerazioni valgono per le altre due funzioni, sicché si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{\nabla}\psi_1 &= -\frac{\underline{n}^1}{|H_1|} = -\frac{\underline{n}^1|\ell_1|}{2|T|} \\ \underline{\nabla}\psi_2 &= -\frac{\underline{n}^2}{|H_2|} = -\frac{\underline{n}^2|\ell_2|}{2|T|} \\ \underline{\nabla}\psi_3 &= -\frac{\underline{n}^3}{|H_3|} = -\frac{\underline{n}^3|\ell_3|}{2|T|} \\ \Rightarrow \int_T \underline{\nabla}\psi_r \underline{\nabla}\psi_s \, dx dy &= \int_T |\ell_r||\ell_s| \frac{\underline{n}^r \cdot \underline{n}^s}{4|T|^2} \, dx dy\end{aligned}$$

Guardando la Fig. 4, e avendo posto

$$V_1 = (x_1, y_1), \quad V_2 = (x_2, y_2), \quad V_3 = (x_3, y_3),$$

si vede che i lati e i versori delle normali uscenti sono dati da:

$$\begin{aligned}\underline{\ell}_1 &= (x_3 - x_2, y_3 - y_2), & \underline{n}^1 &= \frac{(y_3 - y_2, -(x_3 - x_2))}{|\ell_1|}, \\ \underline{\ell}_2 &= (x_1 - x_3, y_1 - y_3), & \underline{n}^2 &= \frac{(y_1 - y_3, -(x_1 - x_3))}{|\ell_2|}, \\ \underline{\ell}_3 &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1), & \underline{n}^3 &= \frac{(y_2 - y_1, -(x_2 - x_1))}{|\ell_3|}.\end{aligned}$$

Conseguentemente,

$$|\ell_r| |\ell_s| \underline{n}^r \cdot \underline{n}^s = (\underline{\ell}_r, \underline{\ell}_s) \quad r, s = 1, 2, 3$$

ottenendo

$$\int_T \underline{\nabla} \psi_r \underline{\nabla} \psi_s \, dx dy = \frac{(\underline{\ell}_r, \underline{\ell}_s)}{4|T|}.$$

Quindi, per il problema che stiamo approssimando, l'espressione finale della [matrice di stiffness elementare](#) su un generico triangolo T è:

$$\mathbf{A}^T = \frac{1}{4|T|} \begin{pmatrix} (\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_1) & (\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_2) & (\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_3) \\ & (\underline{\ell}_2, \underline{\ell}_2) & (\underline{\ell}_2, \underline{\ell}_3) \\ \text{symm.} & & (\underline{\ell}_3, \underline{\ell}_3) \end{pmatrix}$$

Per calcolare \mathbf{A}^T tutto ciò di cui abbiamo bisogno sono le coordinate dei tre vertici (che sono fornite dal codice che produce la mesh). Infatti:

$$\begin{aligned}(\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_1) &= (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \\ (\underline{\ell}_2, \underline{\ell}_2) &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \\ (\underline{\ell}_3, \underline{\ell}_3) &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ (\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_2) &= (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_3), \\ (\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_3) &= (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_1), \\ (\underline{\ell}_2, \underline{\ell}_3) &= (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_1).\end{aligned}$$

L'area di T è data da

$$|T| = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{2},$$

e la matrice può essere calcolata.

Costruzione del termine noto

Come per la matrice, anche il termine noto può essere calcolato elemento per elemento e poi assemblato:

$$b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i dx dy = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f \varphi_i dx dy \quad i = 1, 2, \dots, NP.$$

In generale questi integrali non possono essere calcolati esattamente e sono pertanto approssimati. Di seguito le formule di quadratura (integrazione numerica) su triangoli più usate.

1a): $\int_T g(x, y) dx dy \simeq \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^3 g(x_i, y_i)$ (formula dei vertici)

Questa formula è esatta se $g \in \mathbb{P}_1(T)$.

1b): $\int_T g(x, y) dx dy \simeq |T|g(x_B, y_B)$ $B =$ baricentro di T

Questa formula è esatta se $g \in \mathbb{P}_1(T)$.

2): $\int_T g(x, y) dx dy \simeq \frac{|T|}{3} \sum_{r=1}^3 g(x_r^M, y_r^M)$ (15)

dove (x_r^M, y_r^M) indica il punto medio del lato r .

Questa formula è esatta se $g \in \mathbb{P}_2(T)$.

Usando ad esempio **1a)** o **1b)** si ha:

1a) $\longrightarrow \int_T f \psi_i dx dy \simeq \frac{|T|}{3} f(x_i, y_i) \quad i = 1, 3,$

1b) $\longrightarrow \int_T f \psi_i dx dy \simeq \frac{|T|}{3} f(x_B, y_B) \quad i = 1, 3.$

In entrambi i casi il risultato sarà esatto solo se $f|_T = \text{costante}$. Il termine noto elementare \underline{b}^T sarà:

$$\mathbf{1a)} \longrightarrow \underline{b}^T = \frac{|T|}{3} \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \end{pmatrix} \quad \mathbf{1b)} \longrightarrow \underline{b}^T = \frac{|T|}{3} \begin{pmatrix} f(x_B, y_B) \\ f(x_B, y_B) \\ f(x_B, y_B) \end{pmatrix}$$

Si osserva che le coordinate del baricentro e dei punti medi dei lati si calcolano immediatamente disponendo delle coordinate dei tre vertici. Sempre riferendoci alla Fig. 4:

$$x_B = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i \quad y_B = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

$$\begin{aligned}(x_1^M, y_1^M) &= \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right), \\(x_2^M, y_2^M) &= \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right), \\(x_3^M, y_3^M) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).\end{aligned}$$

Esempio di programmazione

• Assemblaggio delle matrici elementari

Vediamo un esempio di come programmare la costruzione della matrice e del termine noto finali.

I software che generano le mesh forniscono tutte le informazioni necessarie. In particolare, forniscono (non necessariamente con gli stessi nomi usati qui):

- NE: Numero di triangoli (=Elementi) della mesh
- NV: Numero di Vertici (inclusi i vertici sul bordo)
- x(i),y(i): coordinate dei vertici, i=1,NV
- NOD(IE,k): matrice di dimensione NE×3 che, per ogni elemento IE, dà la corrispondenza fra numerazione locale e globale dei vertici:

NOD(IE,1)=i ⇒ il primo vertice di IE ha numero globale i
 NOD(IE,2)=j ⇒ il secondo vertice di IE ha numero globale j
 NOD(IE,3)=k ⇒ il terzo vertice di IE ha numero globale k

In generale, il primo vertice è uno qualunque dei tre, e gli altri due sono numerati in senso antiorario (come in Fig. 4)

- Una flag che indica se un vertice o un lato è sul bordo.

Con queste informazioni possiamo iniziare a scrivere il codice.

- A=zeros(NV); b=zeros(NV,1)
- for IE=1:NE (ciclo sugli elementi)
 - for k=1:3 (ciclo sui tre vertici di IE)
 - i=NOD(IE,k) (numero globale del vertice k)
 - xv(k)=x(i); yv(k)=y(i) (coordinate del vertice k)
 - end

– calcolo delle matrici locali AE e bE (in una function separata)

– Assemblaggio delle matrici locali in quelle globali:

```
for k=1:3
i=NOD(IE,k)
b(i)=b(i)+bE(k)
for kk=1:3
j=NOD(IE,kk)
A(i,j)=A(i,j)+AE(k,kk)
end
end
```

- end (fine del ciclo sugli elementi)

• Condizioni al bordo di Dirichlet

A questo punto restano da assegnare le condizioni di Dirichlet al bordo ($u_h = 0$ nel caso che stiamo trattando). Questo può essere fatto in vari modi. Un modo semplice è il seguente: per ogni vertice sul bordo si modifica la corrispondente riga della matrice ponendo a 0 tutti i coefficienti della riga, tranne il coefficiente diagonale, che si pone uguale a 1. Contemporaneamente il termine noto corrispondente viene posto uguale a 0. Le istruzioni sono le seguenti: se i è un vertice di bordo:

- for j=1:NV
A(i,j)=0
end
A(i,i)=1; b(i)=0

Lo svantaggio di questo modo di procedere è che la matrice non è più simmetrica, e questo impedisce l'uso di metodi efficienti per risolvere sistemi di equazioni lineari. A questo si può rimediare applicando lo stesso procedimento sulla colonna i -esima (cioè, azzerando tutta la colonna i tranne il coefficiente $A(i,i)$ che resta uguale a 1).

Nota Nel caso si abbiano condizioni di Dirichlet non omogenee:

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ su } \partial\Omega$$

niente cambia nella costruzione delle matrici, mentre sul bordo dovremo assegnare g e non 0. Se i è un vertice di bordo:

- for j=1:NV
A(i,j)=0
end
A(i,i)=1, b(i)=g(x(i),y(i))

Questa è l'unica modifica se non ci importa avere ora una matrice non simmetrica. Se invece vogliamo ripristinare la simmetria dobbiamo procedere così:

- for k=1:NV
 - b(k)=b(k)-A(k,i)*(g(x(i),y(i)))
 - A(k,i)=0
 - A(i,k)=0
 - end
 - A(i,i)=1
 - b(i)=g(x(i),y(i))

Applicazione a un altro problema modello

Consideriamo ora il problema di Neumann omogeneo per l'operatore $-\Delta + I$ (ES2 del capitolo precedente):

$$(ES2) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

la cui formulazione variazionale è:

$$(PV_2) \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (16)$$

Essendo le condizioni al bordo di Neumann *naturali*, esse non vanno imposte nello spazio di elementi finiti, che quindi coincide con (7):

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

e il problema approssimato sarà

$$(PV_2)_h \begin{cases} \text{trovare } u_h \in V_h^1 \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u_h \cdot \underline{\nabla} v_h + \int_{\Omega} u_h v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h^1 \end{cases} \quad (17)$$

In questo caso le funzioni di V_h^1 non sono note sul bordo di Ω , e sono dunque incognite del problema. Pertanto la dimensione di V_h^1 è pari al numero totale dei vertici di \mathcal{T}_h :

$$\dim V_h^1 = \text{numero totale dei vertici della mesh} =: NTOT$$

e si avrà

$$V_h^1 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{NTOT}\},$$

con le funzioni di base definite esattamente come prima. Procedendo allo stesso modo, si perviene al seguente sistema lineare di $NTOT$ equazioni in $NTOT$ incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trovare } u_1, u_2, \dots, u_{NTOT} \text{ tali che :} \\ \sum_{j=1}^{NTOT} u_j \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy}_{A_{ij}} + \sum_{j=1}^{NTOT} u_j \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, dx dy}_{M_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i \, dx dy}_{b_i} \\ \forall i = 1, 2, \dots, NTOT. \end{array} \right.$$

La matrice di stiffness \mathbf{A} e il termine noto \mathbf{b} sono gli stessi del caso precedente, mentre la nuova matrice \mathbf{M} si chiama matrice *di massa*. Anch'essa, come \mathbf{A} , ha molti coefficienti nulli: se P_i e P_j non sono vertici dello stesso triangolo, allora $M_{ij} = 0$.

Costruzione della matrice di massa

Anche per la matrice di massa si procede elemento per elemento, essendo

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, dx dy = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi_j \varphi_i \, dx dy$$

Con le notazioni della Fig. 4, sul generico triangolo si deve calcolare

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} \int_T \psi_1 \psi_1 & \int_T \psi_1 \psi_2 & \int_T \psi_1 \psi_3 \\ & \int_T \psi_2 \psi_2 & \int_T \psi_2 \psi_3 \\ \text{symm} & & \int_T \psi_3 \psi_3 \end{pmatrix}$$

I coefficienti di \mathbf{M}^T possono essere calcolati esattamente tramite la formula di quadratura (15), esatta per polinomi di grado fino a 2, e si ottiene:

$$\text{per } r, s = 1, 3 \quad \int_T \psi_r \psi_s = \begin{cases} \frac{|T|}{3} \frac{1}{4} & \text{per } r \neq s \\ \frac{|T|}{3} \frac{1}{2} & \text{per } r = s \end{cases}$$

Quindi:

$$\mathbf{M}^T = |T| \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \text{symm.} & & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$