

# Problemi parabolici

L'esempio più semplice di equazione differenziale di tipo parabolico è costituito dall'equazione del calore, che in una dimensione spaziale è data da

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0 \quad x \in [0, L] \quad 0 \leq t \leq T$$

La funzione  $u(x, t)$  rappresenta la temperatura all'istante  $t$  nel punto  $x$  di una barra di lunghezza  $L$ , e  $k$  è il coefficiente di conduzione termica, che assumiamo costante, ovviamente positiva.

All'equazione differenziale vanno aggiunte due condizioni agli estremi dell'intervallo e una condizione iniziale. Per semplicità prendiamo condizioni al bordo di Dirichlet omogenee, per cui il problema diventa

$$\begin{cases} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0 & x \in [0, L] & 0 \leq t \leq T \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, L] \end{cases} \quad (1)$$

(Naturalmente, per ragioni di continuità della soluzione bisognerà assumere compatibilità sui dati, ossia  $u_0(0) = u_0(L) = 0$ ).

Per dimostrare l'esistenza di una soluzione di (1) procediamo per separazione di variabili. Cerchiamo cioè la soluzione nella forma

$$u(x, t) = w(x)v(t)$$

con  $w(x) \not\equiv 0, v(t) \not\equiv 0$ . Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$w(x)v'(t) - kw''(x)v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v'(t)}{kv(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}$$

Una funzione della sola variabile  $t$  coincide con una funzione della sola variabile  $x$  se e solo se entrambe le funzioni sono costanti. Quindi:

$$\frac{v'(t)}{kv(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda \quad (\text{costante})$$

La funzione  $w(x)$  risolve allora, usando le condizioni ai limiti, il problema

$$\begin{cases} w''(x) - \lambda w(x) = 0 & x \in [0, L] \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$$

Esaminiamo i vari casi:  $\lambda$  positivo, nullo, o negativo, tenendo presente che si cerca  $w(x) \neq 0$ .

- Caso  $\lambda = 0$ : l'equazione diventa  $w''(x) = 0 \rightarrow w(x) = C_1 + C_2x$ . Le condizioni  $w(0) = w(L) = 0$  implicano  $C_1 = C_2 = 0 \rightarrow w \equiv 0$  (escluso)
- Caso  $\lambda > 0$ : la soluzione dell'equazione differenziale è data da  $w(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$  e le condizioni  $w(0) = w(L) = 0$  implicano anche in questo caso che  $w \equiv 0$  (escluso)
- Caso  $\lambda = -\mu^2 < 0$ : è l'unico caso che dà soluzione non identicamente nulla. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} w(x) &= A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x) \\ w(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \quad w(L) = 0 \Rightarrow A \sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$w_n(x) = A \sin(\mu_n x) \quad \text{con } \mu_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

In corrispondenza ai valori ammissibili  $\mu_n$  trovati, la funzione  $v(t)$  risolve  $v'(t) = -\mu_n^2 k v(t)$ , e dunque  $v_n(t) = C e^{-\mu_n^2 k t}$ . Conseguentemente, per ogni  $n$  si avrà

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\mu_n^2 k t} \sin(\mu_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e la soluzione cercata sarà della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\mu_n^2 k t} \sin(\mu_n x).$$

Resta da imporre la condizione iniziale  $u(x, 0) = u_0(x)$  per trovare i coefficienti  $A_n$ . Poichè

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu_n x),$$

bisogna sviluppare il dato iniziale  $u_0(x)$  in serie di Fourier di seni:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(\mu_n x) \quad (\text{serie di Fourier per } u_0(x)).$$

Uguagliando le due serie termine a termine si trovano i coefficienti  $A_n$ , che devono essere uguali ai coefficienti di Fourier  $u_n$  di  $u_0(x)$ . Si è quindi dimostrata l'**esistenza** di una soluzione di (1).

Per dimostrare che il problema è ben posto resta da dimostrare l'unicità e la dipendenza continua dai dati (che in questo caso si riducono al solo dato iniziale  $u_0(x)$ ).

**Unicità:** osserviamo innanzitutto che, se  $u$  è una soluzione, moltiplicando l'equazione differenziale per  $u$ , integrando su  $[0, L]$  e integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \forall t \quad \int_0^L u_t u \, dx + k \int_0^L u_x^2 \, dx - k [u_x u]_0^L &= 0 \quad \text{da cui} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2(x, t) \, dx + k \int_0^L u_x^2(x, t) \, dx &= 0 \quad \text{e quindi} \quad (2) \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2(x, t) \, dx &= -k \int_0^L u_x^2(x, t) \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

La funzione  $E(t) = \int_0^L u^2(x, t) \, dx$  verifica  $E'(t) \leq 0$  e quindi è una funzione decrescente. In particolare

$$E(t) = \int_0^L u^2(x, t) \, dx \leq E(0) = \int_0^L u^2(x, 0) \, dx = \int_0^L (u_0(x))^2 \, dx \quad (3)$$

Come al solito procederemo per contraddizione. Supponiamo che  $u_1 \neq u_2$  siano due soluzioni del problema. La differenza  $\bar{u}$  risolve:

$$\begin{cases} \bar{u}_t(x, t) - k\bar{u}_{xx}(x, t) = 0 & x \in [0, L] \quad 0 \leq t \leq T \\ \bar{u}(0, t) = \bar{u}(L, t) = 0 & \forall t \\ \bar{u}(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \end{cases}$$

Applicando la relazione (3) alla funzione  $\bar{u}(x, t)$  si ha:

$$\int_0^L (\bar{u}(x, t))^2 \, dx \leq \int_0^L (\bar{u}(x, 0))^2 \, dx \equiv 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \bar{u} \equiv 0 \quad \forall t$$

Quindi la soluzione è unica.

**Stabilità:** una prima stima di stabilità si ottiene immediatamente da (3). Infatti, la soluzione unica  $u(x, t)$  verifica

$$\int_0^L u^2(x, t) dx \leq \int_0^L (u_0(x))^2 dx \quad \forall t \in [0, T].$$

Volendo ottenere una stabilità globale, riprendendo la relazione (2) e integrando in  $t$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \left( \int_0^L u^2(x, t) dx \right) dt + k \int_0^T \left( \int_0^L (u_x(x, t))^2 dx \right) dt &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, 0) dx + k \int_0^T \left( \int_0^L (u_x(x, t))^2 dx \right) dt &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, T) dx + k \int_0^T \left( \int_0^L (u_x(x, t))^2 dx \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^L (u_0(x))^2 dx$$

L'estensione del problema (1) al caso di due dimensioni spaziali è: trovare  $u(\underline{x}, t)$  ( $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ) soluzione di:

$$\begin{cases} u_t(\underline{x}, t) - k\Delta u(\underline{x}, t) = 0 & \text{in } Q_T = \Omega \times [0, T] \\ u(\underline{x}, 0) = u_0(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ u(\underline{x}, t) = 0 & \underline{x} \in \partial\Omega, t \in [0, T] \end{cases} \quad (4)$$

Il problema può essere studiato come nel caso  $1D$  per separazione di variabili. Tuttavia, volendo trattare problemi più generali (con presenza di un termine di sorgente di calore, con condizioni ai limiti non omogenee eccetera), abbandoniamo lo studio della formulazione *forte* del problema e passiamo alla formulazione variazionale.

La scrittura generale dei problemi parabolici, che sono problemi ai valori iniziali e ai limiti, è la seguente: si cerca  $u = u(\underline{x}, t)$ , soluzione di:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ u(\underline{x}, 0) = u_0(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ + \text{C.L. di Dirichlet e/o Neumann su } \partial\Omega \forall t \end{cases} \quad (5)$$

dove  $L$  è un operatore differenziale ellittico (uno dei vari visti), e  $f = f(\underline{x}, t)$  è una funzione assegnata. Per la risoluzione numerica del problema tramite

il metodo degli elementi finiti va innanzitutto scritta la formulazione debole di (5).

### Formulazione variazionale del problema (5)

Per fissare le idee assumiamo ad esempio  $u = 0$  su  $\partial\Omega \times [0, T]$ . Procediamo in modo formale, usando quanto appreso per le formulazioni variazionali di problemi ellittici: per ogni  $t > 0$  moltiplichiamo l'equazione differenziale per una funzione test  $v = v(\underline{x})$  e integriamo sul dominio  $\Omega$ . Cerchiamo poi, per ogni  $t > 0$  una funzione  $u(\underline{x}, t) \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\forall t > 0 \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v dx + a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (6)$$

con  $u(\underline{x}, 0) = u_0(\underline{x})$ , dove  $a(u, v)$  è la forma bilineare associata ad  $L$ . Se  $a(\cdot, \cdot)$  è ellittica, si ha esistenza, unicità e stabilità. In realtà basta meno: è sufficiente che  $a(\cdot, \cdot)$  sia *debolmente ellittica*, cioè:

$$\exists \alpha > 0 \text{ e } \lambda \geq 0 : a(v, v) + \lambda \|v\|_0^2 \geq \alpha \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

### Discretizzazione con elementi finiti

Sia  $\mathcal{T}_h$  una suddivisione di  $\Omega$  in triangoli, e sia  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  uno spazio di elementi finiti, di dimensione  $N$ . L'approssimazione di (6) è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0 \text{ Trovare } u_h(\underline{x}, t) \in V_h \text{ tale che :} \\ \int_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h dx + a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (7)$$

con  $u_h(\underline{x}, 0) = u_{0h}$ , dove  $u_{0h}$  è una approssimazione di  $u_0(\underline{x})$  in  $V_h$ . Il problema (7) viene chiamato *semidiscretizzazione* di (6), in quanto è una discretizzazione nelle sole variabili spaziali.

Procedendo come fatto nel capitolo precedente, sia  $\{\varphi_1(\underline{x}), \varphi_2(\underline{x}), \dots, \varphi_N(\underline{x})\}$  una base in  $V_h$ ; si avrà

$$u_h(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(\underline{x}),$$

e i coefficienti  $u_j(t)$  sono le incognite del problema (7). Sostituendo in (7) e scrivendo il problema sulla base si ottiene:

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t) \varphi_j \right) \varphi_i dx + a \left( \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j, \varphi_i \right) = \int_{\Omega} f \varphi_i dx \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ossia

$$\sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t) \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx}_{m_{ij}} + \sum_{j=1}^N u_j(t) \underbrace{a(\varphi_j, \varphi_i)}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i dx}_{f_i(t)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

Posto:

$\mathbf{M} = \{M_{ij}\}$  matrice di massa

$\mathbf{A} = \{A_{ij}\}$  matrice di rigidità

$$\underline{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix} = \text{incognita} \quad \underline{F}(t) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f \varphi_1 dx \\ \int_{\Omega} f \varphi_2 dx \\ \vdots \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f \varphi_N dx \end{bmatrix} = \text{termine noto}$$

$$\underline{U}^{(0)} = \begin{bmatrix} u_0(\underline{x}_1) \\ u_0(\underline{x}_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_0(\underline{x}_N) \end{bmatrix} = \text{dato iniziale}$$

il sistema (8) può essere riscritto come

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\underline{U}}(t) + \mathbf{A}\underline{U}(t) = \underline{F}(t) \\ \underline{U}(0) = \underline{U}^{(0)} \end{cases} \quad (\text{Problema di Cauchy}) \quad (9)$$

Ci si è dunque ricondotti a un sistema di equazioni differenziali ordinarie ai valori iniziali che, essendo  $\mathbf{M}$  invertibile, può essere riscritto come

$$\dot{\underline{U}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\underline{U}(t) + \mathbf{M}^{-1}\underline{F}(t), \quad \underline{U}(0) = \underline{U}^{(0)}.$$

Per risolvere il sistema (9) si possono usare le differenze finite in tempo, approssimando semplicemente la derivata temporale con un rapporto incrementale: suddiviso  $[0, T]$  in  $NT$  intervalli di lunghezza  $\Delta t = \frac{T}{NT}$ , in ogni istante  $t_k$  si ha

$$\underline{U}'(t_k) \sim \frac{\underline{U}(t_k) - \underline{U}(t_{k-1})}{\Delta t} \quad k = 1, 2, \dots, NT.$$

I restanti termini possono essere trattati in vari modi. Denotando rispettivamente con  $\underline{U}^{(k)}, \underline{F}^{(k)}$  le approssimazioni di  $\underline{U}(t_k), \underline{F}(t_k)$ , si ottengono vari schemi:

- $\mathbf{M} \left( \frac{\underline{U}^{(k)} - \underline{U}^{(k-1)}}{\Delta t} \right) + \mathbf{A} \underline{U}^{(k-1)} = \underline{F}^{(k-1)} \quad k = 1, 2, \dots, NT$

(metodo di Eulero esplicito)

- $\mathbf{M} \left( \frac{\underline{U}^{(k)} - \underline{U}^{(k-1)}}{\Delta t} \right) + \mathbf{A} \underline{U}^{(k)} = \underline{F}^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, NT$

(metodo di Eulero implicito)

- $\mathbf{M} \left( \frac{\underline{U}^{(k)} - \underline{U}^{(k-1)}}{\Delta t} \right) + \mathbf{A} \left( \theta \underline{U}^{(k)} + (1-\theta) \underline{U}^{(k-1)} \right) = \theta \underline{F}^{(k)} + (1-\theta) \underline{F}^{(k-1)}$

$$k = 1, 2, \dots, NT, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

( $\theta$ -metodo, esplicito per  $\theta = 0$ , implicito per  $0 < \theta \leq 1$ )

Nel caso esplicito si ottiene: ( $\theta = 0$ )

$$\begin{cases} \mathbf{M} \underline{U}^{(k)} = \mathbf{M} \underline{U}^{(k-1)} - \Delta t (\mathbf{A} \underline{U}^{(k-1)} - \underline{F}^{(k-1)}) & k = 1, 2, \dots, NT \\ \underline{U}^{(0)} = \text{dato} \end{cases}$$

Per trovare la soluzione ad ogni istante temporale bisogna risolvere un sistema di equazioni lineari con matrice  $\mathbf{M}$  (sempre la stessa ad ogni passo temporale) e termine noto già calcolato all'istante precedente. Questo spiega perché lo schema si chiama esplicito.

Nel caso totalmente implicito si ha: ( $\theta = 1$ )

$$\begin{cases} (\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{A}) \underline{U}^{(k)} = \mathbf{M} \underline{U}^{(k-1)} + \Delta t \underline{F}^{(k)} & k = 1, 2, \dots, NT \\ \underline{U}^{(0)} = \text{dato} \end{cases}$$

In questo caso la matrice del sistema può cambiare da un istante all'altro (se  $\Delta t$  non è costante), e nel termine noto la parte  $\underline{F}^{(k)}$  va calcolata. Questo rende gli schemi cosiddetti impliciti più costosi.

Per ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) si ottiene:

$$\left( \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \underline{U}^{(k)} = \left( \mathbf{M} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \underline{U}^{(k-1)} + \frac{1}{2} (\underline{F}^{(k-1)} + \underline{F}^{(k)})$$

Lo schema esplicito è il meno costoso, ma richiede che

$$\Delta t \ll c h^2$$

affinché lo schema converga.

**Esempio:** applicazione al problema (4)

La formulazione variazionale di (4) è:

$$\begin{cases} \forall t > 0 \text{ Trovare } u(\underline{x}, t) \in H_0^1(\Omega) : \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \int_{\Omega} u_t v \, dx + k \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v = v(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

e il problema approssimato diventa (come da (7))

$$\sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t) \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, dx}_{m_{ij}} + \sum_{j=1}^N u_j(t) \underbrace{\int_{\Omega} k \underline{\nabla} \varphi_j \cdot \underline{\nabla} \varphi_i}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i \, dx}_{f_i(t)} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Usiamo Elementi Finiti lineari a tratti e continui:

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in P_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Le matrici di massa e di rigidezza dipendono solo dalle variabili spaziali, e possono essere costruite una volta per tutte a partire dalle matrici elementari, esattamente come visto nel caso di problemi ellittici. Il termine noto dovrà essere approssimato tramite una formula di quadratura a scelta.