

DOMANDE D'ESAME (tempo a disposizione per due domande: 1 ora)

A.A. 2020–2021

1. Equazione del trasporto omogenea su \mathbb{R} : dimostrare esistenza, unicità e stabilità.

Si consideri poi il problema

$$u_t + 3u_x = 0, \quad u(x, 0) = \cos(2\pi x).$$

Si ha $u(x, t) = \quad$ e $u(2, 3) =$

2. Studio di $u_t + cu_x = f(t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, c costante: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.

Si consideri poi il problema

$$u_t + 2u_x = t, \quad u(x, 0) = \sin(\pi x).$$

Si ha $u(x, t) = \quad$ e $u(3, 2) =$

3. Studio di $u_t + cu_x = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, c costante: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.

4. Equazione di trasporto omogenea su un intervallo $[0, L]$: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.

Si consideri poi il problema

$$u_t + 2u_x = 0, \quad u(x, 0) = \cos(x), \quad u(0, t) = 1.$$

Si ha $u(x, t) =$

5. Lemma di Lax-Milgram: enunciato, unicità e stabilità.
6. Classificazione delle equazioni differenziali (a derivate parziali) del II ordine, lineari, a coefficienti costanti.
7. Diffusione del calore in una dimensione: unicità della soluzione e formulazione variazionale.
8. La soluzione di d'Alembert per l'equazione della corda vibrante. Dimostrare unicità e stabilità.

9. Unicità e stabilità della soluzione dell'equazione delle onde su un intervallo finito.
10. Enunciare la disuguaglianza di Poincaré, e dare la dimostrazione in una dimensione.
11. Equivalenza in $H_0^1(\Omega)$ delle norme $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|v\|_{H^1(\Omega)}$.
12. Scrivere e dimostrare la formula di Gauss-Green in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.
13. Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

14. Enunciare condizioni sufficienti sui dati $k(x)$ e $p(x)$ affinché la forma bilineare

$$a(u, v) = \int_0^L k(x) u' v' + \int_0^L p(x) u v$$

sia continua e coerciva (ellittica) in $H_0^1(0, L)$.

15. Continuità e coercività (ellitticità) in $H_0^1(0, L)$ di

$$a(u, v) = \int_0^L (1+x) u' v' dx + \int_0^L 2 u v dx.$$

16. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\operatorname{div}(k(x)\underline{\nabla}u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ sul bordo.}$$

Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinché siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

17. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\operatorname{div}(k(x)\underline{\nabla}u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ sul bordo.}$$

Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinché siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

18. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\operatorname{div}(k(x)\underline{\nabla}u) + u = f \text{ in } \Omega, \quad k(x)\underline{\nabla}u \cdot \underline{n} = 0 \text{ sul bordo.}$$

Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinché siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

19. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\operatorname{div}(k(x)\underline{\nabla}u) + u = f \text{ in } \Omega, \quad k(x)\underline{\nabla}u \cdot \underline{n} = g \text{ sul bordo.}$$

Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinché siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

20. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ al bordo,}$$

e controllare che siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

21. Dato il problema variazionale:

$$\begin{cases} \text{trovare } u \in H_0^1(0, 1) \text{ soluzione di} \\ \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 (1+4x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{cases}$$

verificare l'applicabilità del Lemma di Lax-Milgram.

(Facoltativo: qual è la formulazione “forte” del problema?)

22. Dare la definizione degli spazi funzionali $L^1(0, 1)$, $L^2(0, 1)$ e $H^1(0, 1)$.
Si consideri poi la funzione

$$f(x) = x^r \quad x \in [0, 1] \quad r \in \mathbb{R}$$

Per quali valori di r la funzione $f \in L^1(0, 1)$? Per quali valori di r la funzione $f \in L^2(0, 1)$? Per quali valori di r la funzione $f \in H^1(0, 1)$?

23. Il metodo delle differenze finite per problemi ellittici in una variabile.
24. Il lemma di Céa per il metodo di Galerkin: enunciato e dimostrazione.
25. Il metodo degli elementi finiti per problemi ellittici in una variabile.
26. Problemi ellittici in 2D: approssimazione con Elementi Finiti continui e lineari a tratti.

27. Problemi parabolici in 2D: approssimazione con Elementi Finiti continui e lineari a tratti.
28. Il metodo di Galerkin per problemi ellittici.
29. Sul triangolo con vertici $V_1 = (0, 0)$, $V_2 = (1, 1)$, and $V_3 = (-1, 1)$, calcolare la matrice di stiffness per l'approssimazione con elementi finiti lineari dell'operatore di Laplace.
30. Sul generico triangolo T calcolare la matrice di massa elementare per elementi finiti lineari.
31. Sul triangolo con vertici $V_1 = (0, 0)$, $V_2 = (1, 0)$, $V_3 = (0, 1)$, calcolare l'espressione analitica delle tre funzioni di base $\varphi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$).
32. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ al bordo,}$$

e quindi l'approssimazione con elementi finiti.

33. Si approssimi con elementi finiti continui e lineari a tratti il problema: trovare $u \in H_0^1(0, 1)$ soluzione di

$$\int_0^1 k u' v' + \int_0^1 p u v = \int_0^1 v \quad \forall v \in H_0^1(0, 1),$$

con k e p costanti positive.

Per $h = 1/3$ si calcolino matrici (di stiffness e di massa), e termine noto.

34. Si consideri una fune di lunghezza unitaria, fissata agli estremi e sottoposta ad una forza verticale f . Lo spostamento verticale $u(x)$ è soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) + ku(x) = f(x) & \text{in } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dove $k > 0$ è il coefficiente di elasticità della fune. Si scriva la formulazione debole e l'approssimazione con elementi finiti.