• Spazi vettoriali lineari su $\mathbb{R}$: Uno *spazio vettoriale lineare su* $\mathbb{R}$ è un insieme V nel quale sono definite due operazioni: una *somma*, e un *prodotto per uno scalare*.

- la somma è commutativa $(u + v = v + u \quad \forall u, v \in V)$ e associativa $((u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V)$.
- esiste in V un elemento (che indichiamo naturalmente con "0") tale che $0 + v = v \quad \forall v \in V$
- per ogni $v \in V$ esiste in V il suo opposto (che indichiamo con "$-v$") cioè un elemento di V tale che $v + (-v) = 0$

• Spazi vettoriali lineari su $\mathbb{R}$: Uno *spazio vettoriale lineare su* $\mathbb{R}$ è un insieme V nel quale sono definite due operazioni: una *somma*, e un *prodotto per uno scalare*.

- la somma è commutativa $(u+v=v+u \quad \forall u,v\in V)$ e associativa $((u+v)+w=u+(v+w) \quad \forall u,v,w\in V)$.
- esiste in V un elemento (che indichiamo naturalmente con "0") tale che $0+v=v \quad \forall v\in V$
- per ogni $v\in V$ esiste in V il suo opposto (che indichiamo con "$-v$") cioè un elemento di V tale che $v+(-v)=0$

Il **prodotto per uno scalare** è una applicazione che ad ogni coppia (α,v) con $\alpha\in\mathbb{R}$ e $v\in V$ associa un altro elemento di V (di solito indicato con αv). Si richiede che

- $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall v\in V$
- $\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}\ \forall v,w\in V$
- $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall v\in V$
- $1\,v=v \quad \forall v\in V$

• Applicazioni lineari: Sia V uno spazio vettoriale. Una applicazione ℓ da V in $\mathbb{R}$ è detta essere *lineare* se

$$\forall\, u,\, v \in V \;\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \text{ si ha } \ell(\alpha u + \beta v) = \alpha \ell(u) + \beta \ell(v).$$

Applicazioni lineari e bilineari; funzionali

• Applicazioni lineari: Sia V uno spazio vettoriale. Una applicazione ℓ da V in $\mathbb{R}$ è detta essere *lineare* se

$$\forall\, u,\ v \in V\ \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ si ha } \ell(\alpha u + \beta v) = \alpha\ell(u) + \beta\ell(v).$$

Se V è uno spazio di funzioni le applicazioni da V in $\mathbb{R}$ sono chiamate *funzionali*, e se sono lineari *funzionali lineari*

Applicazioni lineari e bilineari; funzionali

• Applicazioni lineari: Sia V uno spazio vettoriale. Una applicazione ℓ da V in $\mathbb{R}$ è detta essere *lineare* se

$$\forall\, u,\ v \in V\ \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ si ha } \ell(\alpha u + \beta v) = \alpha\ell(u) + \beta\ell(v).$$

Se V è uno spazio di funzioni le applicazioni da V in $\mathbb{R}$ sono chiamate *funzionali*, e se sono lineari *funzionali lineari*

• Applicazioni bilineari: Una applicazione a da $V \times V$ in $\mathbb{R}$ è detta essere *bilineare* se

$$\forall\, u,\ v,\ w \in V\ \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ si ha } a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$
$$\forall\, u,\ v,\ w \in V\ \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ si ha } (u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w)$$

(cioè, in pratica, se è lineare in ciascuno dei suoi due argomenti).

Spazi vettoriali normati

Sono spazi vettoriali in cui è definita una **norma** (misura), cioè una applicazione $V \to \mathbb{R}^+$ (indicata con $\|\cdot\|_V$) che ha le seguenti proprietà:

- $\|v\|_V \geq 0 \quad \|v\|_V = 0 \iff v = 0 \quad \forall v \in V$
- $\|\alpha v\|_V = |\alpha| \, \|v\|_V \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$
- $\|v_1 + v_2\|_V \leq \|v_1\|_V + \|v_2\|_V \quad \forall v_1, v_2 \in V$

Spazi vettoriali normati

Sono spazi vettoriali in cui è definita una **norma** (misura), cioè una applicazione $V \to \mathbb{R}^+$ (indicata con $\| \cdot \|_V$) che ha le seguenti proprietà:

- $\|v\|_V \geq 0 \quad \|v\|_V = 0 \iff v = 0 \quad \forall v \in V$
- $\|\alpha v\|_V = |\alpha| \, \|v\|_V \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$
- $\|v_1 + v_2\|_V \leq \|v_1\|_V + \|v_2\|_V \quad \forall v_1, v_2 \in V$

Esempi: In $\mathbb{R}^n$ l'applicazione $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ è una norma (norma euclidea= lunghezza del vettore $\mathbf{x}$).

Spazi vettoriali normati

Sono spazi vettoriali in cui è definita una **norma** (misura), cioè una applicazione $V \to \mathbb{R}^+$ (indicata con $\|\cdot\|_V$) che ha le seguenti proprietà:

- $\|v\|_V \geq 0 \quad \|v\|_V = 0 \iff v = 0 \quad \forall v \in V$
- $\|\alpha v\|_V = |\alpha| \, \|v\|_V \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$
- $\|v_1 + v_2\|_V \leq \|v_1\|_V + \|v_2\|_V \quad \forall v_1, v_2 \in V$

Esempi: In $\mathbb{R}^n$ l'applicazione $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ è una norma (norma euclidea= lunghezza del vettore $\mathbf{x}$).
L'applicazione $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|_\infty := \max\limits_{i=1,..,n} |x_i|$ è un'altra norma (componente più grossa in valore assoluto).

Spazi vettoriali normati

Sono spazi vettoriali in cui è definita una **norma** (misura), cioè una applicazione $V \to \mathbb{R}^+$ (indicata con $\|\cdot\|_V$) che ha le seguenti proprietà:

- $\|v\|_V \geq 0 \quad \|v\|_V = 0 \iff v = 0 \quad \forall v \in V$
- $\|\alpha v\|_V = |\alpha| \, \|v\|_V \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$
- $\|v_1 + v_2\|_V \leq \|v_1\|_V + \|v_2\|_V \quad \forall v_1, v_2 \in V$

Esempi: In $\mathbb{R}^n$ l'applicazione $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ è una norma (norma euclidea= lunghezza del vettore $\mathbf{x}$).
L'applicazione $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|_\infty := \max\limits_{i=1,..,n} |x_i|$ è un'altra norma (componente più grossa in valore assoluto).
Se V è uno spazio di funzioni, ad es. $V = C^0([a,b])$, le norme analoghe sono

$$f \in C^0([a,b]) \to \|f\|_0 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$f \in C^0([a,b]) \to \|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Prodotto scalare

V spazio vettoriale: il **prodotto scalare** è una applicazione **bilineare**: $V \times V \to \mathbb{R}$, indicato con $(\cdot, \cdot)_V$, con le seguenti proprietà:

- simmetria: $\forall v, w \in V \qquad (v, w)_V = (w, v)_V$
- coercività: $(v, v)_V \geq 0 \quad \forall\, v \in V$ e $(v, v)_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Prodotto scalare

V spazio vettoriale: il **prodotto scalare** è una applicazione **bilineare**: $V \times V \to \mathbb{R}$, indicato con $(\cdot, \cdot)_V$, con le seguenti proprietà:

- simmetria: $\forall v, w \in V \qquad (v, w)_V = (w, v)_V$
- coercività: $(v, v)_V \geq 0 \quad \forall\, v \in V$ e $(v, v)_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Al prodotto scalare si associa una norma, definita da

$$\|v\|_V := \Big((v, v)_V\Big)^{1/2}$$

Prodotto scalare

V spazio vettoriale: il **prodotto scalare** è una applicazione **bilineare**: $V \times V \to \mathbb{R}$, indicato con $(\cdot,\cdot)_V$, con le seguenti proprietà:

- simmetria: $\forall v, w \in V \qquad (v,w)_V = (w,v)_V$
- coercività: $(v,v)_V \geq 0 \quad \forall\, v \in V$ e $(v,v)_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Al prodotto scalare si associa una norma, definita da

$$\|v\|_V := \Big((v,v)_V\Big)^{1/2}$$

Esempi: Se $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ sono due vettori:

$$(\underline{X},\underline{Y})_V = X_1 Y_1 + X_2 Y_2, \qquad \|\underline{X}\|_V^2 = (\underline{X},\underline{X})$$

Prodotto scalare

V spazio vettoriale: il **prodotto scalare** è una applicazione **bilineare**: $V \times V \to \mathbb{R}$, indicato con $(\cdot,\cdot)_V$, con le seguenti proprietà:

- simmetria: $\forall v, w \in V \qquad (v,w)_V = (w,v)_V$
- coercività: $(v,v)_V \geq 0 \quad \forall\, v \in V$ e $(v,v)_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Al prodotto scalare si associa una norma, definita da

$$\|v\|_V := \Big((v,v)_V\Big)^{1/2}$$

Esempi: Se $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ sono due vettori:

$$(\underline{X},\underline{Y})_V = X_1 Y_1 + X_2 Y_2, \qquad \|\underline{X}\|_V^2 = (\underline{X},\underline{X})$$

Se V è uno spazio di funzioni, ad es. $V = C^0(\Omega)$, $(\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1,2,3)$:

$$(f,g)_V = \int_\Omega f\, g\, dxdy \qquad \|f\|_V^2 = \int_\Omega |f|^2 dxdy$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma associata. Vale la seguente disuguaglianza, detta di *Cauchy-Schwarz*:

$$|(v, w)_V| \leq \|v\|_V \, \|w\|_V \quad \forall\, v, w \in V$$

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma associata. Vale la seguente disuguaglianza, detta di *Cauchy-Schwarz*:

$$|(v, w)_V| \leq \|v\|_V \, \|w\|_V \quad \forall \, v, w \in V$$

Dimostrazione.
Siano v, w due qualunque funzioni $\in V$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Ovviamente si ha che $tv - w \in V$ e che $\|tv - w\|_V^2 \geq 0$.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma associata. Vale la seguente disuguaglianza, detta di *Cauchy-Schwarz*:

$$|(v, w)_V| \leq \|v\|_V \, \|w\|_V \quad \forall\, v, w \in V$$

Dimostrazione.
Siano v, w due qualunque funzioni $\in V$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Ovviamente si ha che $tv - w \in V$ e che $\|tv - w\|_V^2 \geq 0$. Sviluppando il quadrato si ha:

$$\|tv - w\|_V^2 = \underbrace{t^2\|v\|_V^2 - 2t(v, w)_V + \|w\|_V^2}_{g(t)} \geq 0$$

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma associata. Vale la seguente disuguaglianza, detta di *Cauchy-Schwarz*:

$$|(v,w)_V| \leq \|v\|_V \, \|w\|_V \quad \forall\, v, w \in V$$

Dimostrazione.
Siano v, w due qualunque funzioni $\in V$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Ovviamente si ha che $tv - w \in V$ e che $\|tv - w\|_V^2 \geq 0$. Sviluppando il quadrato si ha:

$$\|tv - w\|_V^2 = \underbrace{t^2\|v\|_V^2 - 2t(v,w)_V + \|w\|_V^2}_{g(t)} \geq 0$$

L'equazione (di secondo grado in t) $g(t) = 0$ non può avere radici reali distinte (essendo la parabola $g(t)$ non negativa), quindi il discriminante è ≤ 0:

$$4(v,w)_V^2 - 4\|v\|_V^2 \, \|w\|_V^2 \leq 0$$

da cui il risultato.

Continuità di funzionali lineari e forme bilineari

- Continuità di funzionali lineari:

Sia V uno spazio vettoriale normato, e sia ℓ un funzionale lineare su V. Diciamo che ℓ è continuo da V in $\mathbb{R}$ se

$$\exists M > 0 \, \text{tale che} \;\; |\ell(v)| \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Continuità di funzionali lineari e forme bilineari

- Continuità di funzionali lineari:

Sia V uno spazio vettoriale normato, e sia ℓ un funzionale lineare su V. Diciamo che ℓ è continuo da V in $\mathbb{R}$ se

$$\exists M > 0 \text{ tale che } |\ell(v)| \leq M\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

- Continuità di forme bilineari:

Sia V uno spazio vettoriale normato, e sia $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineare su V. Diciamo che a è continua se

$$\exists M > 0 \text{ tale che } |a(u,v)| \leq M\,\|u\|_V\,\|v\|_V \quad \forall\, u, v \in V.$$

Poichè una parte ellittica è sempre presente nei problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (siano essi ellittici, parabolici o iperbolici), ci occuperemo ora di problemi ellittici, e introdurremo la loro formulazione variazionale (detta anche *debole*).

Introduzione alle formulazioni variazionali

Poichè una parte ellittica è sempre presente nei problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (siano essi ellittici, parabolici o iperbolici), ci occuperemo ora di problemi ellittici, e introdurremo la loro formulazione variazionale (detta anche *debole*). Tipico esempio: l'operatore di Laplace Δ, e l'equazione corrispondente sarà del tipo: data f trovare u tale che $\Delta u = f$ in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Introduzione alle formulazioni variazionali

Poichè una parte ellittica è sempre presente nei problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (siano essi ellittici, parabolici o iperbolici), ci occuperemo ora di problemi ellittici, e introdurremo la loro formulazione variazionale (detta anche *debole*).
Tipico esempio: l'operatore di Laplace Δ, e l'equazione corrispondente sarà del tipo: data f trovare u tale che $\Delta u = f$ in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
All'equazione differenziale vanno aggiunte condizioni ai limiti sul bordo di Ω: $\Gamma = \partial\Omega$. Queste possono essere di vari tipi:

- $u = g$ su Γ, detta *Condizione ai limiti di Dirichlet* (omogenea se $g = 0$), in cui si assegna il valore che u deve avere su Γ.
- $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ su Γ, detta *Condizione ai limiti di Neumann* (omogenea se $g = 0$) in cui si assegna la derivata normale uscente che u deve avere su Γ ("assegnare il flusso uscente": $\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g$)

Condizioni ai limiti

- $u = g$ su Γ, detta *Condizione ai limiti di Dirichlet* (omogenea se $g = 0$), in cui si assegna il valore che u deve avere su Γ.
- $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ su Γ, detta *Condizione ai limiti di Neumann* (omogenea se $g = 0$) in cui si assegna la derivata normale uscente che u deve avere su Γ ("assegnare il flusso uscente": $\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g$)

Condizioni ai limiti

- $u = g$ su Γ, detta *Condizione ai limiti di Dirichlet* (omogenea se $g = 0$), in cui si assegna il valore che u deve avere su Γ.
- $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ su Γ, detta *Condizione ai limiti di Neumann* (omogenea se $g = 0$) in cui si assegna la derivata normale uscente che u deve avere su Γ ("assegnare il flusso uscente": $\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g$)

Ma spesso la frontiera Γ viene suddivisa in due parti: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ con $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ e si assegnano due funzioni g_D e g_N richiedendo che

- $u = g_D$ su Γ_D, e $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g_N$ su Γ_N *Condizioni ai limiti miste Dirichlet/Neumann* (omogenee se $g_D = 0$ e $g_N = 0$).

Per semplicità prendiamo condizioni ai limiti omogenee.

$$(ES1)\begin{cases} -\Delta u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & su \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{condizioni di Dirichlet}$$

Alcuni esempi di problemi ai limiti

Per semplicità prendiamo condizioni ai limiti omogenee.

$$(ES1)\begin{cases} -\Delta u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & su \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{condizioni di Dirichlet}$$

$$(ES2)\begin{cases} -\Delta u + u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & su \quad \Gamma \end{cases} \qquad \text{condizioni di Neumann}$$

Alcuni esempi di problemi ai limiti

$$(ES3)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \textit{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \textit{su} \quad \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \textit{su} \quad \Gamma_N \end{cases}$$

condizioni miste Dirichlet /Neumann

Alcuni esempi di problemi ai limiti

$$
(ES3)\begin{cases} -\Delta u + u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & su \quad \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & su \quad \Gamma_N \end{cases}
$$

condizioni miste Dirichlet /Neumann

Esempio di problema a coefficienti variabili

$$
(ES4)\begin{cases} -div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u) + \gamma(\underline{x})u = f & in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & su \quad \Gamma_D \\ k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 & su \quad \Gamma_N \end{cases}
$$

condizioni miste Dirichlet /Neumann

Formulazione variazionale del Problema ES1

$$\boxed{(ES1) \quad -\Delta u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad su\ \Gamma}$$

Formulazione variazionale del Problema ES1

$$\boxed{(ES1) \quad -\Delta u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad su\ \Gamma}$$

Il procedimento è sempre lo stesso: si moltiplica l'equazione per una funzione v "regolare" e si integra su Ω:

$$\int_\Omega -\Delta u\, v = \int_\Omega fv \quad \forall v \text{ (funzione test "regolare")}$$

Poi si integra per parti il termine a sinistra usando le formule di Gauss-Green:

$$\int_\Omega -\Delta u\, v = \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \qquad \text{sempre } \forall v \text{ "regolare".}$$

$$\boxed{(ES1) \quad -\Delta u = f \quad in\, \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad su\, \Gamma}$$

$$\boxed{(ES1) \quad -\Delta u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad su\ \Gamma}$$

$$\int_\Omega -\Delta u\, v = \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \qquad \text{sempre } \forall v \text{ “regolare”}.$$

La condizione ai limiti $u_{|\partial\Omega} = 0$ non dà alcuna informazione su $\frac{\partial u}{\partial n}$, e va imposta forzatamente. Inoltre è possibile annullare il fastidioso integrale di bordo scegliendo funzioni test che siano nulle sul bordo, cioè $v = 0$ su $\partial\Omega$, come la soluzione che cerchiamo.

$$\boxed{(ES1) \quad -\Delta u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad su\ \Gamma}$$

$$\int_\Omega -\Delta u\, v = \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \qquad \text{sempre } \forall v \text{ “regolare”}.$$

La condizione ai limiti $u_{|\partial\Omega} = 0$ non dà alcuna informazione su $\frac{\partial u}{\partial n}$, e va imposta forzatamente. Inoltre è possibile annullare il fastidioso integrale di bordo scegliendo funzioni test che siano nulle sul bordo, cioè $v = 0$ su $\partial\Omega$, come la soluzione che cerchiamo.

Si ottiene:

$$(PV)_1 \begin{cases} \text{trovare } u \text{ “regolare” con } u = 0 \text{ su } \partial\Omega \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \text{ “regolare” con } v = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

Cosa serve come regolarità? *Grosso modo* serve che la soluzione u, le funzioni test v, e il dato f siano tali che i due integrali siano finiti. Serve quindi che il prodotto fv sia integrabile, e che pure il prodotto $\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$ sia integrabile.

Cosa serve come regolarità? *Grosso modo* serve che la soluzione u, le funzioni test v, e il dato f siano tali che i due integrali siano finiti. Serve quindi che il prodotto fv sia integrabile, e che pure il prodotto $\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$ sia integrabile.
Spazi di funzioni che servono (e useremo spesso):

$$L^2(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tali che } \int_\Omega v^2 dxdy < +\infty\} \qquad (L^2)$$

Cosa serve come regolarità? *Grosso modo* serve che la soluzione u, le funzioni test v, e il dato f siano tali che i due integrali siano finiti. Serve quindi che il prodotto fv sia integrabile, e che pure il prodotto $\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$ sia integrabile.
Spazi di funzioni che servono (e useremo spesso):

$$L^2(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tali che } \int_\Omega v^2 dxdy < +\infty\} \qquad (L^2)$$

$$H^1(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } \int_\Omega v^2 < +\infty, \int_\Omega |\nabla v|^2 < +\infty\} \qquad (H^1)$$

Cosa serve come regolarità? *Grosso modo* serve che la soluzione u, le funzioni test v, e il dato f siano tali che i due integrali siano finiti. Serve quindi che il prodotto fv sia integrabile, e che pure il prodotto $\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$ sia integrabile.
Spazi di funzioni che servono (e useremo spesso):

$$L^2(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tali che } \int_\Omega v^2 dxdy < +\infty\} \qquad (L^2)$$

$$H^1(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } \int_\Omega v^2 < +\infty, \int_\Omega |\nabla v|^2 < +\infty\} \qquad (H^1)$$

$$\equiv \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } v \in L^2(\Omega), \underline{\nabla} v \in [L^2(\Omega)]^2\}$$

Cosa serve come regolarità? *Grosso modo* serve che la soluzione u, le funzioni test v, e il dato f siano tali che i due integrali siano finiti. Serve quindi che il prodotto fv sia integrabile, e che pure il prodotto $\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$ sia integrabile.
Spazi di funzioni che servono (e useremo spesso):

$$L^2(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tali che } \int_\Omega v^2 dxdy < +\infty\} \qquad (L^2)$$

$$H^1(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } \int_\Omega v^2 < +\infty, \int_\Omega |\nabla v|^2 < +\infty\} \qquad (H^1)$$

$$\equiv \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } v \in L^2(\Omega), \underline{\nabla} v \in [L^2(\Omega)]^2\}$$

$$H_0^1(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } v \in H^1(\Omega), \text{ e } v = 0 \text{ su } \Gamma\} \qquad (H_0^1)$$

Cosa serve come regolarità? *Grosso modo* serve che la soluzione u, le funzioni test v, e il dato f siano tali che i due integrali siano finiti. Serve quindi che il prodotto fv sia integrabile, e che pure il prodotto $\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$ sia integrabile.
Spazi di funzioni che servono (e useremo spesso):

$$L^2(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tali che } \int_\Omega v^2 dxdy < +\infty\} \qquad (L^2)$$

$$H^1(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } \int_\Omega v^2 < +\infty, \int_\Omega |\nabla v|^2 < +\infty\} \qquad (H^1)$$

$$\equiv \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } v \in L^2(\Omega), \underline{\nabla} v \in [L^2(\Omega)]^2\}$$

$$H_0^1(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } v \in H^1(\Omega), \text{ e } v = 0 \text{ su } \Gamma\} \qquad (H_0^1)$$

$$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

Prodotto scalare e norma in L^2:

$$(v, w)_{L^2} = \int_\Omega vw \, dxdy \qquad \qquad \|v\|^2_{L^2} = \int_\Omega v^2 \, dxdy.$$

Prodotto scalare e norma in L^2:

$$(v,w)_{L^2} = \int_\Omega vw\, dxdy \qquad\qquad \|v\|^2_{L^2} = \int_\Omega v^2\, dxdy.$$

Prodotto scalare e norma in H^1:

$$(v,w)_{H^1} = \int_\Omega vw\, dxdy + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w\, dxdy$$
$$\|v\|^2_{H^1} = \int_\Omega v^2\, dxdy + \int_\Omega |\nabla v|^2 dxdy \equiv \|v\|^2_{L^2} + \|\underline{\nabla} v\|^2_{L^2}$$

Prodotto scalare e norma in L^2:

$$(v, w)_{L^2} = \int_\Omega vw\,dxdy \qquad \|v\|^2_{L^2} = \int_\Omega v^2\,dxdy.$$

Prodotto scalare e norma in H^1:

$$(v, w)_{H^1} = \int_\Omega vw\,dxdy + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w\,dxdy$$
$$\|v\|^2_{H^1} = \int_\Omega v^2\,dxdy + \int_\Omega |\nabla v|^2 dxdy \equiv \|v\|^2_{L^2} + \|\underline{\nabla} v\|^2_{L^2}$$

Poiché $H^1_0 \subset H^1$, possiamo usare stesso prodotto scalare e norma:

$$(v, w)_{H^1_0} \equiv (v, w)_{H^1} \qquad \|v\|^2_{H^1_0} \equiv \|v\|^2_{H^1}$$

Con questi prodotti scalari e norme i 3 spazi sono spazi di Hilbert
(la definizione non è completamente corretta, ma è sufficiente per gli scopi del corso)

Esercizio: Verifica

Verifichiamo che L^2 è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma

$$(v, w)_{L^2} = \int_\Omega v\, w\, dxdy \qquad \|v\|_{L^2}^2 = \int_\Omega v^2 dxdy.$$

Esercizio: Verifica

Verifichiamo che L^2 è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma

$$(v,w)_{L^2} = \int_\Omega v\, w\, dxdy \qquad\qquad \|v\|_{L^2}^2 = \int_\Omega v^2 dxdy.$$

Verifichiamo che $(v,w)_{L^2} := \int_\Omega v\, w\, dxdy$ è un prodotto scalare

- La simmetria e la bi-linerità sono ovvie. Infatti:

$$\int_\Omega v\, w\, dxdy = \int_\Omega w\, v\, dxdy$$

Esercizio: Verifica

Verifichiamo che L^2 è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma

$$(v, w)_{L^2} = \int_\Omega v\, w\, dxdy \qquad\qquad \|v\|_{L^2}^2 = \int_\Omega v^2 dxdy.$$

Verifichiamo che $(v, w)_{L^2} := \int_\Omega v\, w\, dxdy$ è un prodotto scalare

- La simmetria e la bi-linerità sono ovvie. Infatti:

$$\int_\Omega v\, w\, dxdy = \int_\Omega w\, v\, dxdy$$

Se α e β sono numeri reali, e u, v, w funzioni di $L^2(\Omega)$ si ha:

$$\int_\Omega (\alpha u + \beta v) w\, dxdy = \alpha \int_\Omega u\, w\, dxdy + \beta \int_\Omega v\, w\, dxdy$$

Esercizio: Verifica

Verifichiamo che L^2 è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma

$$(v, w)_{L^2} = \int_\Omega v\, w\, dxdy \qquad \|v\|_{L^2}^2 = \int_\Omega v^2 dxdy.$$

Verifichiamo che $(v, w)_{L^2} := \int_\Omega v\, w\, dxdy$ è un prodotto scalare

- La simmetria e la bi-linerità sono ovvie. Infatti:

$$\int_\Omega v\, w\, dxdy = \int_\Omega w\, v\, dxdy$$

Se α e β sono numeri reali, e u, v, w funzioni di $L^2(\Omega)$ si ha:

$$\int_\Omega (\alpha u + \beta v) w\, dxdy = \alpha \int_\Omega u\, w\, dxdy + \beta \int_\Omega v\, w\, dxdy$$

(analogamente $\int_\Omega u(\alpha v + \beta w)\, dxdy = \alpha \int_\Omega u\, v\, dxdy + \beta \int_\Omega u\, w\, dxdy$)

Esercizio: Verifica

Verifichiamo che L^2 è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma

$$(v, w)_{L^2} = \int_\Omega v\, w\, dxdy \qquad \|v\|^2_{L^2} = \int_\Omega v^2 dxdy.$$

Verifichiamo che $(v, w)_{L^2} := \int_\Omega v\, w\, dxdy$ è un prodotto scalare

- La simmetria e la bi-linerità sono ovvie. Infatti:

$$\int_\Omega v\, w\, dxdy = \int_\Omega w\, v\, dxdy$$

Se α e β sono numeri reali, e u, v, w funzioni di $L^2(\Omega)$ si ha:

$$\int_\Omega (\alpha u + \beta v) w\, dxdy = \alpha \int_\Omega u\, w\, dxdy + \beta \int_\Omega v\, w\, dxdy$$

(analogamente $\int_\Omega u(\alpha v + \beta w)\, dxdy = \alpha \int_\Omega u\, v\, dxdy + \beta \int_\Omega u\, w\, dxdy$)

- $(v, v)_{L^2} \geq 0$ è anch'esso ovvio.

Esercizio: Verifica

Verifichiamo che L^2 è uno spazio vettoriale con prodotto scalare e norma

$$(v, w)_{L^2} = \int_\Omega v\, w\, dxdy \qquad\qquad \|v\|^2_{L^2} = \int_\Omega v^2 dxdy.$$

Verifichiamo che $(v, w)_{L^2} := \int_\Omega v\, w\, dxdy$ è un prodotto scalare

- La simmetria e la bi-linerità sono ovvie. Infatti:

$$\int_\Omega v\, w\, dxdy = \int_\Omega w\, v\, dxdy$$

Se α e β sono numeri reali, e u, v, w funzioni di $L^2(\Omega)$ si ha:

$$\int_\Omega (\alpha u + \beta v) w\, dxdy = \alpha \int_\Omega u\, w\, dxdy + \beta \int_\Omega v\, w\, dxdy$$

(analogamente $\int_\Omega u(\alpha v + \beta w)\, dxdy = \alpha \int_\Omega u\, v\, dxdy + \beta \int_\Omega u\, w\, dxdy$)

- $(v, v)_{L^2} \geq 0$ è anch'esso ovvio.
- $(v, v)_{L^2} = 0 \Leftrightarrow v = 0$? Se $v = 0$ chiaramente si ha $(v, v)_{L^2} = 0$.

Viceversa: se $(v, v)_{L^2} = 0 \Rightarrow \int_\Omega v^2\, dxdy = 0 \Rightarrow v = 0$

Esercizio: Verifica

- L^2 è uno Spazio vettoriale

Dobbiamo verificare due condizioni:

1 : $\forall v_1, v_2 \in L^2$ si ha $v_1 + v_2 \in L^2$?

Esercizio: Verifica

- L^2 è uno Spazio vettoriale

Dobbiamo verificare due condizioni:

1 : $\forall v_1, v_2 \in L^2$ si ha $v_1 + v_2 \in L^2$? Si perché

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|_{L^2}^2 &= \|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2 + 2(v_1, v_2)_{L^2} \\ &\le \underbrace{\|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2 + 2\|v_1\|_{L^2}\,\|v_2\|_{L^2}}_{(Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|v_1\|_{L^2} + \|v_2\|_{L^2})^2 < +\infty \end{aligned}$$

Esercizio: Verifica

- L^2 è uno Spazio vettoriale

Dobbiamo verificare due condizioni:

1 : $\forall v_1, v_2 \in L^2$ si ha $v_1 + v_2 \in L^2$? Si perché

$$\begin{aligned}\|v_1 + v_2\|_{L^2}^2 &= \|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2 + 2(v_1, v_2)_{L^2} \\ &\leq \underbrace{\|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2 + 2\|v_1\|_{L^2}\|v_2\|_{L^2}}_{(Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|v_1\|_{L^2} + \|v_2\|_{L^2})^2 < +\infty\end{aligned}$$

2 : $\alpha v \in L^2, \forall v \in L^2, \alpha \in \mathbb{R}$?

Esercizio: Verifica

- L^2 è uno Spazio vettoriale

Dobbiamo verificare due condizioni:

1 : $\forall v_1, v_2 \in L^2$ si ha $v_1 + v_2 \in L^2$? Si perché

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2_{L^2} &= \|v_1\|^2_{L^2} + \|v_2\|^2_{L^2} + 2(v_1, v_2)_{L^2} \\ &\leq \underbrace{\|v_1\|^2_{L^2} + \|v_2\|^2_{L^2} + 2\|v_1\|_{L^2}\,\|v_2\|_{L^2}}_{(Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|v_1\|_{L^2} + \|v_2\|_{L^2})^2 < +\infty \end{aligned}$$

2 : $\alpha\, v \in L^2, \forall v \in L^2, \alpha \in \mathbb{R}$? Si perché

$$\|\alpha v\|^2_{L^2} = \int_\Omega (\alpha v)^2 dxdy = \alpha^2 \|v\|^2_{L^2} < +\infty$$

Torniamo a $(PV)_1$. Lo spazio L^2, con le sue proprietà, permette di dare un senso all'integrale $\int_\Omega f\, v$. Infatti, dalla definizione di prodotto scalare in L^2 e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha:

$$\text{se } f \in L^2 \text{ e } v \in L^2, \quad \int_\Omega f\, v = (f, v)_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\, \|v\|_{L^2} \quad \text{(finito)}$$

Torniamo a $(PV)_1$. Lo spazio L^2, con le sue proprietà, permette di dare un senso all'integrale $\int_\Omega f\, v$. Infatti, dalla definizione di prodotto scalare in L^2 e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha:

$$\text{se } f \in L^2 \text{ e } v \in L^2, \quad \int_\Omega f\, v = (f, v)_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \text{(finito)}$$

Per dare un senso a $\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$, non basta che u e v siano in L^2; serve che anche $\underline{\nabla} u$ e $\underline{\nabla} v$ siano in $[L^2]^2$, perchè in tal modo si avrebbe:

$$\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = (\underline{\nabla} u, \underline{\nabla} v)_{L^2} \leq \|\underline{\nabla} u\|_{L^2} \|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \quad \text{(finito)}$$

Serve quindi u, $v \in H^1$.

Formulazione variazionale di (ES1)

Il problema

$$(PV)_1 \begin{cases} \text{trovare } u \ \text{ “regolare” con } u = 0 \text{ su } \partial\Omega \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \ \text{ “regolare” con } v = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

può essere riscritto come:

$$(PV)_1 \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

Condizioni di Dirichlet non-omogenee

$$\boxed{(ES1_g) \quad -\Delta u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = g \quad su\ \Gamma}$$

Condizioni di Dirichlet non-omogenee

$$\boxed{(ES1_g) \quad -\Delta u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = g \quad su\ \Gamma}$$

Procedendo come per $(ES1)$ avremmo

$$(PV)_1^g \begin{cases} \text{trovare } u \ \text{ “regolare” con } u = g \text{ su } \partial\Omega \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \ \text{ “regolare” con } v = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

Condizioni di Dirichlet non-omogenee

$$\boxed{(ES1_g) \quad -\Delta u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = g \quad su\ \Gamma}$$

Procedendo come per $(ES1)$ avremmo

$$(PV)_1^g \begin{cases} \text{trovare } u \text{ “regolare” con } u = g \text{ su } \partial\Omega \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\ v \quad \forall v \text{ “regolare” con } v = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

Introducendo l'insieme

$$H_g^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.c. } u = g \text{ su } \Gamma\}$$

il problema può essere riscritto come

$$(PV)_1^g \begin{cases} \text{trovare } u \in H_g^1(\Omega) \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\ v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Formulazione variazionale del Problema $(ES2)$

$$\boxed{(ES2) \quad -\Delta u + u = f \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad su \quad \Gamma}$$

Formulazione variazionale del Problema $(ES2)$

$$\boxed{(ES2) \quad -\Delta u + u = f \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad su \quad \Gamma}$$

Procediamo come prima (si moltiplica l'equazione differenziale per una funzione test v "regolare", si integra su Ω e si usano le formule di Gauss-Green):

$$\int_\Omega f\, v = \int_\Omega -\Delta u\, v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega u\, v$$

Formulazione variazionale del Problema $(ES2)$

$$\boxed{(ES2) \quad -\Delta u + u = f \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad su \quad \Gamma}$$

Procediamo come prima (si moltiplica l'equazione differenziale per una funzione test v "regolare", si integra su Ω e si usano le formule di Gauss-Green):

$$\int_\Omega f\, v = \int_\Omega -\Delta u\, v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega u\, v$$

$\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0$ perchè $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (condizione naturale).

Quindi si ottiene (la regolarità è la stessa di prima):

$$(PV)_2 \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Esercizio: condizioni di Neumann non omogenee

$$\boxed{(ES2_g) \quad -\Delta u + u = f \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad su \quad \Gamma}$$

Esercizio: condizioni di Neumann non omogenee

$$\boxed{(ES2_g) \quad -\Delta u + u = f \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad su \quad \Gamma}$$

Procediamo come prima (si moltiplica l'equazione differenziale per una funzione test v "regolare", si integra su Ω e si usano le formule di Gauss-Green):

$$\int_\Omega f\, v = \int_\Omega -\Delta u\, v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega u\, v$$

Esercizio: condizioni di Neumann non omogenee

$$\boxed{(ES2_g) \quad -\Delta u + u = f \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad su \quad \Gamma}$$

Procediamo come prima (si moltiplica l'equazione differenziale per una funzione test v "regolare", si integra su Ω e si usano le formule di Gauss-Green):

$$\int_\Omega f\, v = \int_\Omega -\Delta u\, v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega u\, v$$

$\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\partial\Omega} g\, v$ perchè $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial n} = g$ (condizione naturale).

Quindi si ottiene (la regolarità è la stessa di prima):

$$(PV)_2^g \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v + \int_{\partial\Omega} g\, v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Formulazione variazionale del Problema $(ES3)$

$$\boxed{(ES3) \quad -\Delta u + u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad su\ \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad su\ \Gamma_N}$$

Formulazione variazionale del Problema $(ES3)$

$$(ES3) \quad -\Delta u + u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad su\ \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad su\ \Gamma_N$$

Per il problema $(ES3)$, l'unica differenza rispetto $(PV)_2$ è data dalle condizioni ai limiti: $u = 0$ su Γ_D (da imporre) e $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ su Γ_N (naturale).

Formulazione variazionale del Problema $(ES3)$

$$\boxed{(ES3) \quad -\Delta u + u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad su\ \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad su\ \Gamma_N}$$

Per il problema $(ES3)$, l'unica differenza rispetto $(PV)_2$ è data dalle condizioni ai limiti: $u = 0$ su Γ_D (da imporre) e $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ su Γ_N (naturale).
In questo caso:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v + 0$$

Formulazione variazionale del Problema $(ES3)$

$$(ES3) \quad -\Delta u + u = f \quad in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \quad su\ \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad su\ \Gamma_N$$

Per il problema $(ES3)$, l'unica differenza rispetto $(PV)_2$ è data dalle condizioni ai limiti: $u = 0$ su Γ_D (da imporre) e $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su Γ_N (naturale).
In questo caso:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v + 0$$

L'unico modo per eliminare l'integrale sul bordo Γ_D è di scegliere le funzioni test v nulle su Γ_D (come la soluzione u). Quindi:

$$(PV)_3 \begin{cases} \text{trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Formulazione variazionale del Problema ES4

$$\boxed{(ES4) \quad -div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u) + \gamma(\underline{x})u = f \;\; in\; \Omega \subset \mathbb{R}^2}$$

$$\boxed{u = 0 \; su \; \Gamma_D, \quad k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 \; su \; \Gamma_N}$$

$$\boxed{(ES4) \quad -div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u) + \gamma(\underline{x})u = f \ \ in \ \Omega \subset \mathbb{R}^2}$$

$$\boxed{u = 0 \ su \ \Gamma_D, \quad k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 \ su \ \Gamma_N}$$

Per il problema $(ES4)$ (condizioni ai limiti come in $(ES3)$, operatore differenziale con coefficienti variabili) si procede allo stesso modo:

$$\int_\Omega f\, v = \int_\Omega -div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u)\, v + \int_\Omega \gamma(x) u\, v.$$

Formulazione variazionale del Problema ES4

$$\boxed{(ES4) \quad -\,div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u) + \gamma(\underline{x})u = f \;\; in \; \Omega \subset \mathbb{R}^2}$$

$$\boxed{u = 0 \; su \; \Gamma_D, \quad k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 \; su \; \Gamma_N}$$

Per il problema $(ES4)$ (condizioni ai limiti come in $(ES3)$, operatore differenziale con coefficienti variabili) si procede allo stesso modo:

$$\int_\Omega f\, v = \int_\Omega -div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u)\, v + \int_\Omega \gamma(x) u\, v.$$

Usando sempre la formula di *Gauss-Green* (con $\underline{V} = k(\underline{x})\nabla u$) si ottiene

$$-\int_\Omega div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u)\, v = \int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v$$

Formulazione variazionale del Problema ES4

$$\boxed{(ES4) \quad -\,div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u) + \gamma(\underline{x})u = f \;\; in \; \Omega \subset \mathbb{R}^2}$$

$$\boxed{u = 0 \; su \; \Gamma_D, \quad k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 \; su \; \Gamma_N}$$

Per il problema $(ES4)$ (condizioni ai limiti come in $(ES3)$, operatore differenziale con coefficienti variabili) si procede allo stesso modo:

$$\int_\Omega f\, v = \int_\Omega -div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u)\, v + \int_\Omega \gamma(x) u\, v.$$

Usando sempre la formula di *Gauss-Green* (con $\underline{V} = k(\underline{x})\nabla u$) si ottiene

$$-\int_\Omega div(k(\underline{x})\underline{\nabla} u)\, v = \int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v$$

Essendo $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ si ha

$$\int_{\partial\Omega} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v = \underbrace{\int_{\Gamma_N} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v}_{=0 \text{ perché } k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 \text{ su } \Gamma_N} + \int_{\Gamma_D} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v$$

Dunque l'integrale sul bordo si riduce a

$$\int_{\partial\Omega} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v = \int_{\Gamma_D} (k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v$$

Per annullare $\int_{\Gamma_D}$ basta scegliere $v = 0$ su Γ_D (come la soluzione u), ottenendo

$$(PV)_4 \begin{cases} \text{trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) u\, v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Disuguaglianza di Poincaré

Dato un insieme $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, si ha

$$\exists\, C_p > 0 : \quad \|v\|_{L^2(D)} \leq C_p \, \|\underline{\nabla} v\|_{L^2(D)} \qquad \forall v \in H_0^1(D)$$

Disuguaglianza di Poincaré

Dato un insieme $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, si ha

$$\exists\, C_p > 0 : \quad \|v\|_{L^2(D)} \leq C_p \, \|\underline{\nabla} v\|_{L^2(D)} \qquad \forall v \in H_0^1(D)$$

Dimostrazione.
Consideriamo il caso monodimensionale ($D = [a, b]$). Quindi

$$H_0^1(a, b) = \{v \in H^1(a, b) : \; v(a) = v(b) = 0\}$$

Disuguaglianza di Poincaré

Dato un insieme $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, si ha

$$\exists\, C_p > 0 : \quad \|v\|_{L^2(D)} \leq C_p \, \|\nabla v\|_{L^2(D)} \qquad \forall v \in H^1_0(D)$$

Dimostrazione.
Consideriamo il caso monodimensionale $(D = [a, b])$. Quindi

$$H^1_0(a, b) = \{v \in H^1(a, b) : \; v(a) = v(b) = 0\}$$

Dal 1^o teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\forall\, x \in (a, b) \quad v(x) = \int_a^x v'(t)\, dt \rightarrow v^2(x) = \Big(\int_a^x v'(t)\, dt \Big)^2$$

Disuguaglianza di Poincaré

Dato un insieme $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, si ha

$$\exists\, C_p > 0: \quad \|v\|_{L^2(D)} \leq C_p \, \|\underline{\nabla} v\|_{L^2(D)} \qquad \forall v \in H_0^1(D)$$

Dimostrazione.
Consideriamo il caso monodimensionale ($D = [a, b]$). Quindi

$$H_0^1(a, b) = \{v \in H^1(a, b): \; v(a) = v(b) = 0\}$$

Dal 1^o teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\forall\, x \in (a, b) \quad v(x) = \int_a^x v'(t)\, dt \to v^2(x) = \Big(\int_a^x v'(t)\, dt \Big)^2$$

Dalla definizione della norma in L^2 si ha

$$\|v\|_{L^2(a,b)}^2 \equiv \int_a^b v^2(x)\, dx = \int_a^b \Big(\int_a^x v'(t) dt \Big)^2 dx = \int_a^b (v', 1)_{L^2(a,x)}^2 dx$$

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b (v', 1)^2_{L^2(a,x)} dx$$

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b (v',1)^2_{L^2(a,x)}dx$$

$$(v',1)^2_{L^2(a,x)} \leq \underbrace{\left(\|v'\|^2_{L^2(a,x)}\,\|1\|^2_{L^2(a,x)}\right)}_{(Cauchy-Schwarz)} \leq \|v'\|^2_{L^2(a,b)}(x-a)$$

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b (v',1)^2_{L^2(a,x)} dx$$

$$(v',1)^2_{L^2(a,x)} \leq \underbrace{\left(\|v'\|^2_{L^2(a,x)} \, \|1\|^2_{L^2(a,x)}\right)}_{(Cauchy-Schwarz)} \leq \|v'\|^2_{L^2(a,b)}(x-a)$$

Quindi

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} \leq \|v'\|^2_{L^2(a,b)} \int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}\|v'\|^2_{L^2(a,b)}$$

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b (v',1)^2_{L^2(a,x)}dx$$

$$(v',1)^2_{L^2(a,x)} \le \underbrace{\left(\|v'\|^2_{L^2(a,x)}\,\|1\|^2_{L^2(a,x)}\right)}_{(Cauchy-Schwarz)} \le \|v'\|^2_{L^2(a,b)}(x-a)$$

Quindi

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} \le \|v'\|^2_{L^2(a,b)} \int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}\|v'\|^2_{L^2(a,b)}$$

da cui

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \le \frac{(b-a)}{\sqrt{2}}\|v'\|_{L^2(a,b)} \qquad \left(\text{quindi } C_p = \frac{(b-a)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b (v',1)^2_{L^2(a,x)} dx$$

$$(v',1)^2_{L^2(a,x)} \leq \underbrace{\left(\|v'\|^2_{L^2(a,x)} \, \|1\|^2_{L^2(a,x)}\right)}_{(Cauchy-Schwarz)} \leq \|v'\|^2_{L^2(a,b)}(x-a)$$

Quindi

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} \leq \|v'\|^2_{L^2(a,b)} \int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}\|v'\|^2_{L^2(a,b)}$$

da cui

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}}\|v'\|_{L^2(a,b)} \qquad \left(\text{quindi } C_p = \frac{(b-a)}{\sqrt{2}}\right)$$

La dimostrazione si estende al caso $2D$, con C_p che dipende dalla misura del dominio Ω.

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b (v',1)^2_{L^2(a,x)} dx$$

$$(v',1)^2_{L^2(a,x)} \le \underbrace{\left(\|v'\|^2_{L^2(a,x)} \|1\|^2_{L^2(a,x)}\right)}_{(Cauchy-Schwarz)} \le \|v'\|^2_{L^2(a,b)}(x-a)$$

Quindi

$$\|v\|^2_{L^2(a,b)} \le \|v'\|^2_{L^2(a,b)} \int_a^b (x-a)\, dx = \frac{(b-a)^2}{2}\|v'\|^2_{L^2(a,b)}$$

da cui

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \le \frac{(b-a)}{\sqrt{2}}\|v'\|_{L^2(a,b)} \qquad \left(\text{quindi } C_p = \frac{(b-a)}{\sqrt{2}}\right)$$

La dimostrazione si estende al caso $2D$, con C_p che dipende dalla misura del dominio Ω.

Nota: come si vede dalla dimostrazione, la disuguaglianza vale se $v(a) = 0$ oppure $v(b) = 0$, ossia basta l'annullamento in un punto solo. In $2D$ basta che v sia nulla su un pezzo (diciamo: un sottoinsieme di lunghezza non nulla) del bordo di Ω.

Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré

In $H_0^1(\Omega)$, o in $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1, v = 0 \text{ su } \Gamma_D\}$, la $\|v\|_{H^1}$ è equivalente alla $\|\underline{\nabla} v\|_{L^2}$. Precisamente:

$$\|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \leq \|\underline{v}\|_{H^1} \leq \sqrt{C_p^2 + 1}\|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ o } v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$$

dove C_p è la costante della disuguaglianza di Poincaré.

Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré

In $H^1_0(\Omega)$, o in $H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega) = \{v \in H^1, v = 0 \text{ su } \Gamma_D\}$, la $\|v\|_{H^1}$ è equivalente alla $\|\underline{\nabla} v\|_{L^2}$. Precisamente:

$$\|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \leq \|\underline{v}\|_{H^1} \leq \sqrt{C_p^2 + 1}\|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \text{ o } v \in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$$

dove C_p è la costante della disuguaglianza di Poincaré.

Dimostrazione: La prima disuguaglianza è ovvia; poichè $\|v\|_{L^2} \geq 0$ si ha

$$\|v\|^2_{H^1} = \|v\|^2_{L^2} + \|\underline{\nabla} v\|^2_{L^2} \geq \|\underline{\nabla} v\|^2_{L^2}$$

Per Poincaré:

$$\|v\|^2_{H^1} \leq C_p^2 \, \|\underline{\nabla} v\|^2_{L^2} + \|\underline{\nabla} v\|^2_{L^2} = (C_p^2 + 1) \, \|\underline{\nabla} v\|^2_{L^2}$$

da cui si ottiene il risultato.

Quindi in H^1_0, o in H^1_{0,Γ_D} si può usare indifferentemente l'una o l'altra norma, secondo quanto più conveniente.