Formulazioni variazionali astratte

Dagli esempi precedenti si è visto che si passa dal problema differenziale in forma forte alla sua formulazione variazionale con una procedura che sostanzialmente è la stessa per tutti i problemi.
Gli ingredienti principali sono le formule di Gauss-Green e una scelta opportuna delle funzioni test (nulle laddove sono imposte condizioni di Dirichlet, senza alcun vincolo laddove si hanno condizioni di Neumann).

Formulazioni variazionali astratte

Dagli esempi precedenti si è visto che si passa dal problema differenziale in forma forte alla sua formulazione variazionale con una procedura che sostanzialmente è la stessa per tutti i problemi.
Gli ingredienti principali sono le formule di Gauss-Green e una scelta opportuna delle funzioni test (nulle laddove sono imposte condizioni di Dirichlet, senza alcun vincolo laddove si hanno condizioni di Neumann).
Abbiamo anche visto negli esempi che tutte le formulazioni variazionali presentano la stessa struttura e possono essere scritti in forma astratta come:

$$\text{trovare } u \in V \text{ tale che} \quad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V.$$

Formulazioni variazionali astratte

Dagli esempi precedenti si è visto che si passa dal problema differenziale in forma forte alla sua formulazione variazionale con una procedura che sostanzialmente è la stessa per tutti i problemi.
Gli ingredienti principali sono le formule di Gauss-Green e una scelta opportuna delle funzioni test (nulle laddove sono imposte condizioni di Dirichlet, senza alcun vincolo laddove si hanno condizioni di Neumann).
Abbiamo anche visto negli esempi che tutte le formulazioni variazionali presentano la stessa struttura e possono essere scritti in forma astratta come:

$$\text{trovare } u \in V \text{ tale che} \qquad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V.$$

Lo strumento per studiare la buona posizione di un problema variazionale è il Lemma di Lax-Milgram.

Lemma di Lax-Milgram

Dato un problema variazionale

$$(PVar) \qquad \text{trovare } u \in V \text{ tale che} \qquad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V,$$

dove:

- V è uno spazio di Hilbert con norma $\|v\|_V$, e prodotto scalare associato $(v,w)_V$;

Lemma di Lax-Milgram

Dato un problema variazionale

$$(PVar) \qquad \text{trovare } u \in V \text{ tale che} \qquad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V,$$

dove:

- V è uno spazio di Hilbert con norma $\|v\|_V$, e prodotto scalare associato $(v, w)_V$;
- $a(\cdot, \cdot)$ è una forma bilineare da $V \times V \to \mathbb{R}$ e continua, cioè (come abbiamo visto):

$$\exists M > 0 \quad t.c. \quad |a(v, w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v, w \in V \qquad (1)$$

Lemma di Lax-Milgram

Dato un problema variazionale

$$(PVar) \qquad \text{trovare } u \in V \text{ tale che } \quad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V,$$

dove:

- V è uno spazio di Hilbert con norma $\|v\|_V$, e prodotto scalare associato $(v,w)_V$;
- $a(\cdot,\cdot)$ è una forma bilineare da $V \times V \to \mathbb{R}$ e continua, cioè (come abbiamo visto):

$$\exists M > 0 \quad t.c. \quad |a(v,w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v,w \in V \qquad (1)$$

- $\ell(v)$ è un funzionale da $V \to \mathbb{R}$ lineare e continuo, cioè (come abbiamo visto):

$$\exists C_\ell > 0 \quad t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell\|v\|_V \quad \forall v \in V \qquad (2)$$

Se, oltre alle ipotesi precedenti, $a(\cdot,\cdot)$ è V-ellittica (o *coerciva*), cioè:

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{tale che} \qquad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \tag{3}$$

allora $(PVar)$ ha un'unica soluzione e

$$\|u\|_V \leq \frac{C_\ell}{\alpha}.$$

Lemma di Lax-Milgram: dimostrazione

Dimostrazione:

• Esistenza: richiede strumenti complicati di Analisi funzionale che esulano dagli scopi di questo corso, per cui la omettiamo.

Lemma di Lax-Milgram: dimostrazione

Dimostrazione:

• Esistenza: richiede strumenti complicati di Analisi funzionale che esulano dagli scopi di questo corso, per cui la omettiamo.

• Unicità: si dimostra per contraddizione. Si supponga quindi che $u_1 \in V$ e $u_2 \in V$ siano due diverse soluzioni di $(PVar)$: $u_1 \neq u_2$. Quindi:

$$\begin{aligned} u_1 \in V: &\quad a(u_1, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \\ u_2 \in V: &\quad a(u_2, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Lemma di Lax-Milgram: dimostrazione

Dimostrazione:

• Esistenza: richiede strumenti complicati di Analisi funzionale che esulano dagli scopi di questo corso, per cui la omettiamo.

• Unicità: si dimostra per contraddizione. Si supponga quindi che $u_1 \in V$ e $u_2 \in V$ siano due diverse soluzioni di $(PVar)$: $u_1 \neq u_2$. Quindi:

$$\begin{aligned} u_1 \in V : \quad & a(u_1, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \\ u_2 \in V : \quad & a(u_2, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Sottraendo e sfruttando la linearità di a nel primo argomento si ottiene

$$a(u_1, v) - a(u_2, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Lemma di Lax-Milgram: dimostrazione

Dimostrazione:

• Esistenza: richiede strumenti complicati di Analisi funzionale che esulano dagli scopi di questo corso, per cui la omettiamo.

• Unicità: si dimostra per contraddizione. Si supponga quindi che $u_1 \in V$ e $u_2 \in V$ siano due diverse soluzioni di $(PVar)$: $u_1 \neq u_2$. Quindi:

$$\begin{aligned} u_1 \in V: &\quad a(u_1, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \\ u_2 \in V: &\quad a(u_2, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Sottraendo e sfruttando la linearità di a nel primo argomento si ottiene

$$a(u_1, v) - a(u_2, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Poichè l'uguaglianza vale per qualsiasi $v \in V$, si ha in particolare

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Dalla (3) (ellitticità di a) si deduce quindi

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

$$\boxed{\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0}$$

$$\boxed{\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0}$$

Per la proprietà della norma di essere ≥ 0 si deve avere:

$$u_1 - u_2 \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

da cui la contraddizione. Quindi la soluzione è unica.

$$\boxed{\alpha\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0}$$

Per la proprietà della norma di essere ≥ 0 si deve avere:

$$u_1 - u_2 \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

da cui la contraddizione. Quindi la soluzione è unica.

• Stabilità: Sia u l'unica soluzione di $(PVar)$. Sfruttiamo ora la (3) (cioè la V-ellitticità di a) con $v = u$, il fatto che u risolve $(PVar)$, e, sempre con $v = u$, la (2) (limitatezza di ℓ). Abbiamo

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \ell(u) \leq C_\ell\|u\|_V,$$

$$\boxed{\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0}$$

Per la proprietà della norma di essere ≥ 0 si deve avere:

$$u_1 - u_2 \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

da cui la contraddizione. Quindi la soluzione è unica.

• Stabilità: Sia u l'unica soluzione di $(PVar)$. Sfruttiamo ora la (3) (cioè la V-ellitticità di a) con $v = u$, il fatto che u risolve $(PVar)$, e, sempre con $v = u$, la (2) (limitatezza di ℓ). Abbiamo

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \ell(u) \leq C_\ell \|u\|_V,$$

da cui banalmente

$$\|u\|_V^2 \leq \frac{C_\ell}{\alpha} \|u\|_V \qquad \text{e quindi} \qquad \|u\|_V \leq \frac{C_\ell}{\alpha}.$$

Lemma di Lax-Milgram: seconda parte

Se, oltre alle ipotesi precedenti, la forma $a(\cdot, \cdot)$ è simmetrica, cioè

$$\underbrace{a(v, w) = a(w, v) \quad \forall v, w \in V}_{\text{simmetria}}$$

allora, introducendo il funzionale (dell'energia)

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v)$$

si ha che il problema $(PVar)$ è equivalente al *problema di minimo*:

$$(PMin) \qquad \text{trovare } u \in V \text{ tale che } J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V$$

cioè, se u risolve $(PVar)$ risolve anche $(PMin)$ e viceversa.
(Per la dimostrazione si rinvia alle dispense.)

Applicazioni del Lemma di Lax-Milgram

Riprendiamo ora le formulazioni variazionali dei problemi visti e controlliamo che siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

Applicazioni del Lemma di Lax-Milgram

Riprendiamo ora le formulazioni variazionali dei problemi visti e controlliamo che siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

Ricordiamo gli spazi funzionali che ci servono con le rispettive norme e prodotti scalari. Sia D un insieme del piano ($D \subset \mathbb{R}^2$):

$$L^2(D): \quad (\varphi, \psi)_0 := \int_D \varphi\psi, \quad \|\varphi\|_0^2 := (\varphi, \varphi)_0$$

Applicazioni del Lemma di Lax-Milgram

Riprendiamo ora le formulazioni variazionali dei problemi visti e controlliamo che siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

Ricordiamo gli spazi funzionali che ci servono con le rispettive norme e prodotti scalari. Sia D un insieme del piano ($D \subset \mathbb{R}^2$):

$$L^2(D): \quad (\varphi, \psi)_0 := \int_D \varphi\psi, \quad \|\varphi\|_0^2 := (\varphi, \varphi)_0$$

$$\begin{aligned} H^1(D): \quad & (\varphi, \psi)_1 := (\varphi, \psi)_0 + (\underline{\nabla}\varphi, \underline{\nabla}\psi)_0 \\ & \|\varphi\|_1^2 := (\varphi, \varphi)_0 + (\underline{\nabla}\varphi, \underline{\nabla}\varphi)_0 = \|\varphi\|_0^2 + \|\underline{\nabla}\varphi\|_0^2 \end{aligned}$$

Applicazioni del Lemma di Lax-Milgram

Riprendiamo ora le formulazioni variazionali dei problemi visti e controlliamo che siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

Ricordiamo gli spazi funzionali che ci servono con le rispettive norme e prodotti scalari. Sia D un insieme del piano ($D \subset \mathbb{R}^2$):

$$L^2(D): \quad (\varphi, \psi)_0 := \int_D \varphi\psi, \quad \|\varphi\|_0^2 := (\varphi, \varphi)_0$$

$$\begin{aligned} H^1(D): \quad & (\varphi, \psi)_1 := (\varphi, \psi)_0 + (\underline{\nabla}\varphi, \underline{\nabla}\psi)_0 \\ & \|\varphi\|_1^2 := (\varphi, \varphi)_0 + (\underline{\nabla}\varphi, \underline{\nabla}\varphi)_0 = \|\varphi\|_0^2 + \|\underline{\nabla}\varphi\|_0^2 \end{aligned}$$

(Ovviamente: $\|\varphi\|_0 \le \|\varphi\|_1$ e $\|\underline{\nabla}\varphi\|_0 \le \|\varphi\|_1$)

Applicazioni del Lemma di Lax-Milgram

Riprendiamo ora le formulazioni variazionali dei problemi visti e controlliamo che siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

Ricordiamo gli spazi funzionali che ci servono con le rispettive norme e prodotti scalari. Sia D un insieme del piano ($D \subset \mathbb{R}^2$):

$$L^2(D): \quad (\varphi,\psi)_0 := \int_D \varphi\psi, \quad \|\varphi\|_0^2 := (\varphi,\varphi)_0$$

$$\begin{aligned} H^1(D): \quad & (\varphi,\psi)_1 := (\varphi,\psi)_0 + (\underline{\nabla}\varphi, \underline{\nabla}\psi)_0 \\ & \|\varphi\|_1^2 := (\varphi,\varphi)_0 + (\underline{\nabla}\varphi, \underline{\nabla}\varphi)_0 = \|\varphi\|_0^2 + \|\underline{\nabla}\varphi\|_0^2 \end{aligned}$$

(Ovviamente: $\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1$ e $\|\underline{\nabla}\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1$)
In $H_0^1(D) \subset H^1(D)$ possiamo scegliere che norma usare, avendo a disposizione, grazie alla disuguaglianza di Poincaré, due norme equivalenti:

$$\|\varphi\|_{H_0^1(D)} = \begin{cases} \|\varphi\|_1 \\ \|\underline{\nabla}\varphi\|_0 \end{cases}$$

Esistenza e unicità della soluzione di $(ES1)$ $(-\Delta u = f \;\; in \; \Omega, \;\; u = 0 \; su \; \Gamma)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES1)$:

$$(PV)_1 \begin{cases} \text{Trovare } u \in H_0^1(\Omega): \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f \, v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Esistenza e unicità della soluzione di $(ES1)$ $(-\Delta u = f \ \ in\ \Omega,\ \ u = 0\ su\ \Gamma)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES1)$:

$$(PV)_1 \begin{cases} \text{Trovare } u \in H_0^1(\Omega): \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Per utilizzare il Lemma su $(PV)_1$, lo riscriviamo in forma astratta definendo

$$V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V$$

(Trovare $u \in V$ soluzione di $a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$)

$$\boxed{V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

$$V := H^1_0(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v,w \in V$$

- In $V = H^1_0(\Omega)$ possiamo scegliere prodotto scalare e norma come $(v,w)_V := (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 (= \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \nabla w), \quad \|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_0$

$$\boxed{V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

- In $V = H_0^1(\Omega)$ possiamo scegliere prodotto scalare e norma come
$$(v,w)_V := (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 (= \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \nabla w), \quad \|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_0$$
- si deve verificare che:

$$1 - a(v,w) \text{ è bilineare, continua ed ellittica,}$$

$$2 - \ell(v) \text{ è lineare e continuo.}$$

$$\boxed{V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

- In $V = H_0^1(\Omega)$ possiamo scegliere prodotto scalare e norma come
$$(v,w)_V := (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 (= \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \nabla w), \quad \|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_0$$
- si deve verificare che:

$$1 - a(v,w) \text{ è bilineare, continua ed ellittica,}$$

$$2 - \ell(v) \text{ è lineare e continuo.}$$

- Cominciamo con $\ell(v)$: è lineare per le proprietà dell'integrale, e deve valere la continuità, cioè

$$\exists\, C_\ell > 0 \; t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

$$\boxed{V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

- In $V = H_0^1(\Omega)$ possiamo scegliere prodotto scalare e norma come
$$(v,w)_V := (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 (= \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \nabla w), \quad \|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_0$$
- si deve verificare che:

$$1 - a(v,w) \text{ è bilineare, continua ed ellittica,}$$
$$2 - \ell(v) \text{ è lineare e continuo.}$$

- Cominciamo con $\ell(v)$: è lineare per le proprietà dell'integrale, e deve valere la continuità, cioè

$$\exists\, C_\ell > 0 \ t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Nel caso considerato otteniamo

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f,v)_0 \underbrace{\leq \|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \qquad \underbrace{\leq \|f\|_0 C_P \|v\|_V}_{\text{Poincaré (vale perchè } v \in H_0^1)} \qquad \forall v \in V.$$

$$\boxed{V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

- In $V = H_0^1(\Omega)$ possiamo scegliere prodotto scalare e norma come
$$(v,w)_V := (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 (= \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \nabla w), \quad \|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_0$$
- si deve verificare che:

$$1 - a(v,w) \text{ è bilineare, continua ed ellittica,}$$
$$2 - \ell(v) \text{ è lineare e continuo.}$$

- Cominciamo con $\ell(v)$: è lineare per le proprietà dell'integrale, e deve valere la continuità, cioè

$$\exists\, C_\ell > 0 \ t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Nel caso considerato otteniamo

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f, v)_0 \underbrace{\leq \|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \qquad \underbrace{\leq \|f\|_0 C_p \|v\|_V}_{\text{Poincaré (vale perchè } v \in H_0^1)} \qquad \forall v \in V.$$

Quindi $\ell(v)$ è continuo e la costante di continuità è $C_\ell = \|f\|_0 C_p$

- Occupiamoci di $a(v, w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.

- Occupiamoci di $a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.
  Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:

$$|a(v,w)| \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v,\, w \in V.$$

- Occupiamoci di $a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.
  Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:

$$|a(v,w)| \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v,\, w \in V.$$

  Si ottiene:

$$a(v,w) = \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 \underbrace{\leq \|\underline{\nabla} v\|_0 \|\underline{\nabla} w\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} = \|v\|_V \|w\|_V$$

  $\Rightarrow$ continua con $M = 1$

- Occupiamoci di $a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.
  Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:

$$|a(v,w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v,\, w \in V.$$

  Si ottiene:

$$a(v,w) = \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 \underbrace{\leq \|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} = \|v\|_V\|w\|_V$$

  $\Rightarrow$ continua con $M = 1$

  Per l'ellitticità si deve trovare una costante $\alpha > 0$ per cui si ha:

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

- Occupiamoci di $a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.
  Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:

  $$|a(v,w)| \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v,\, w \in V.$$

  Si ottiene:

  $$a(v,w) = \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 \underbrace{\leq \|\underline{\nabla} v\|_0 \|\underline{\nabla} w\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} = \|v\|_V \|w\|_V$$

  $\Rightarrow$ continua con $M = 1$

  Per l'ellitticità si deve trovare una costante $\alpha > 0$ per cui si ha:

  $$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

  Nel nostro caso si ottiene, per ogni $v \in V$:

  $$a(v,v) = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} v)_0 = \|v\|_V^2 \Rightarrow \quad \underbrace{\text{vale l'ellitticità con } \alpha = 1}_{a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2}$$

Infine,
• $a(u, v)$ è anche simmetrica, quindi c'è equivalenza col problema di minimo.

In conclusione, abbiamo verificato che valgono tutte le ipotesi del Lemma di Lax Milgram. Quindi, il problema $(ES1)$ ha un'unica soluzione, e si ha:

$$\|u\|_V \leq \frac{C_\ell}{\alpha} = \|f\|_0 C_p$$

quindi si ha anche dipendenza continua dai dati (f è il solo dato del problema)

Stabilità del problema ($ES1$)

La dipendenza continua dai dati garantisce la stabilità del problema, cioè che "piccoli" errori sui dati determinano "piccoli" errori sulla soluzione.

Stabilità del problema ($ES1$)

La dipendenza continua dai dati garantisce la stabilità del problema, cioè che "piccoli" errori sui dati determinano "piccoli" errori sulla soluzione.Vediamolo in dettaglio sul problema che stiamo esaminando.

Stabilità del problema ($ES1$)

La dipendenza continua dai dati garantisce la stabilità del problema, cioè che "piccoli" errori sui dati determinano "piccoli" errori sulla soluzione.Vediamolo in dettaglio sul problema che stiamo esaminando.
Sia u la soluzione "vera" corrispondente al dato f, e sia u^S la soluzione "sporca" corrispondente a un dato f^S "sporco" (ad esempio, proviene da dati di laboratorio con un margine di errore).

Stabilità del problema $(ES1)$

La dipendenza continua dai dati garantisce la stabilità del problema, cioè che "piccoli" errori sui dati determinano "piccoli" errori sulla soluzione.Vediamolo in dettaglio sul problema che stiamo esaminando. Sia u la soluzione "vera" corrispondente al dato f, e sia u^S la soluzione "sporca" corrispondente a un dato f^S "sporco" (ad esempio, proviene da dati di laboratorio con un margine di errore). Quindi:

$$u \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega fv \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(in astratto: $u \in V: \ a(u,v) = (f,v)_0 \ \forall v \in V$)

$$u^S \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega \underline{\nabla} u^S \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f^S v \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(in astratto: $u^S \in V: \ a(u^S,v) = (f^S,v)_0 \ \forall v \in V$)

Stabilità del problema $(ES1)$

La dipendenza continua dai dati garantisce la stabilità del problema, cioè che "piccoli" errori sui dati determinano "piccoli" errori sulla soluzione.Vediamolo in dettaglio sul problema che stiamo esaminando. Sia u la soluzione "vera" corrispondente al dato f, e sia u^S la soluzione "sporca" corrispondente a un dato f^S "sporco" (ad esempio, proviene da dati di laboratorio con un margine di errore). Quindi:

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega fv \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(in astratto: $u \in V : \ a(u, v) = (f, v)_0 \ \forall v \in V$)

$$u^S \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \underline{\nabla} u^S \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f^S v \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(in astratto: $u^S \in V : \ a(u^S, v) = (f^S, v)_0 \ \forall v \in V$)

Facendo la differenza fra i due problemi si ottiene:

$$u - u^S \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \underline{\nabla}(u - u^S) \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega (f - f^S) v \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$u - u^S \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega \underline{\nabla}(u - u^S) \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega (f - f^S) v \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(in astratto $u - u^S \in V: \ a(u - u^S, v) = (f - f^S, v)_0 \ \forall v \in V$

$$u - u^S \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \underline{\nabla}(u - u^S) \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega (f - f^S) v \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(in astratto $u - u^S \in V : \ a(u - u^S, v) = (f - f^S, v)_0 \ \forall v \in V$

ossia, la funzione $u - u^S$ risolve il problema con dato $f - f^S$. La dipendenza continua dai dati assicura che

$$\|u - u^S\|_V \leq C_P \|f - f^S\|_0.$$

Quindi, se $\|f - f^S\|_0 \leq \varepsilon$, con ε piccolo, si ha $\|u - u^S\|_V \leq C_P \varepsilon$.

Esercizio: altra norma in $H_0^1(\Omega)$

$$\boxed{V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

Esercizio: altra norma in $H_0^1(\Omega)$

$$\boxed{V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

- In $V = H_0^1(\Omega)$ possiamo scegliere prodotto scalare e norma di $H^1(\Omega)$:

$$(v,w)_V := (v,w)_1 (= (v,w)_0 + (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0)$$
$$\|v\|_V = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$$

Esercizio: altra norma in $H^1_0(\Omega)$

$$\boxed{V := H^1_0(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

- In $V = H^1_0(\Omega)$ possiamo scegliere prodotto scalare e norma di $H^1(\Omega)$:

$$(v,w)_V := (v,w)_1 (= (v,w)_0 + (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0)$$
$$\|v\|_V = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$$

- $\ell(v)$: è lineare per le proprietà dell'integrale, e deve valere la continuità, cioè $\exists\, C_\ell > 0\ t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V \quad \forall v \in V$.

Esercizio: altra norma in $H_0^1(\Omega)$

$$\boxed{V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

- In $V = H_0^1(\Omega)$ possiamo scegliere prodotto scalare e norma di $H^1(\Omega)$:

$$(v,w)_V := (v,w)_1 (= (v,w)_0 + (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0)$$
$$\|v\|_V = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$$

- $\ell(v)$: è lineare per le proprietà dell'integrale, e deve valere la continuità, cioè $\exists\, C_\ell > 0\ t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V \quad \forall v \in V$.
  Nel caso considerato otteniamo

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f,v)_0 \underbrace{\leq \|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \|f\|_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Esercizio: altra norma in $H_0^1(\Omega)$

$$\boxed{V := H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_\Omega f\, v \quad v, w \in V}$$

- In $V = H_0^1(\Omega)$ possiamo scegliere prodotto scalare e norma di $H^1(\Omega)$:

$$(v,w)_V := (v,w)_1 (= (v,w)_0 + (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0)$$
$$\|v\|_V = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$$

- $\ell(v)$: è lineare per le proprietà dell'integrale, e deve valere la continuità, cioè $\exists\, C_\ell > 0 \ t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V \quad \forall v \in V$.
  Nel caso considerato otteniamo

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f,v)_0 \underbrace{\leq \|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \|f\|_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Quindi $\ell(v)$ è continuo e la costante di continuità è $C_\ell = \|f\|_0$

- Occupiamoci di $a(v, w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.

- Occupiamoci di $a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.
  Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:
$$|a(v,w)| \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v,\, w \in V.$$

- Occupiamoci di $a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.
  Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:

$$|a(v,w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v,\, w \in V.$$

  Si ottiene (banalmente perchè $\|\underline{\nabla} v\|_0 \leq \|v\|_V \ \forall v \in V$)

$$a(v,w) = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 \underbrace{\leq \|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \|v\|_V\|w\|_V \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ continua con $M = 1$

- Occupiamoci di $a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.
  Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:
  $$|a(v,w)| \leq M\|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v,\, w \in V.$$
  Si ottiene (banalmente perchè $\|\underline{\nabla} v\|_0 \leq \|v\|_V \; \forall v \in V$)
  $$a(v,w) = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 \underbrace{\leq \|\underline{\nabla} v\|_0 \|\underline{\nabla} w\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \|v\|_V \|w\|_V \quad \Rightarrow$$
  $\Rightarrow$ continua con $M = 1$

  Per l'ellitticità si deve trovare una costante $\alpha > 0$ per cui si ha:
  $$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

- Occupiamoci di $a(v,w) := \int_\Omega \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w$. La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.
  Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:

$$|a(v,w)| \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v,\, w \in V.$$

  Si ottiene (banalmente perchè $\|\underline{\nabla} v\|_0 \leq \|v\|_V \; \forall v \in V$)

$$a(v,w) = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_0 \underbrace{\leq \|\underline{\nabla} v\|_0 \|\underline{\nabla} w\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \|v\|_V \|w\|_V \quad \Rightarrow$$

  $\Rightarrow$ continua con $M = 1$

  Per l'ellitticità si deve trovare una costante $\alpha > 0$ per cui si ha:

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

  Nel nostro caso si ottiene, per ogni $v \in V$, grazie alla disuguaglianza di Poincaré:

  $a(v,v) = (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} v)_0 \geq \frac{1}{C_P^2+1} \|v\|_V^2 \Rightarrow$
  vale l'ellitticità con $\alpha = \frac{1}{C_P^2+1}$

Infine,
• $a(u, v)$ è anche simmetrica, quindi c'è equivalenza col problema di minimo.

In conclusione, abbiamo verificato che cambiando la norma cambiano le costanti di continuità ed ellitticità ma tutte le ipotesi del Lemma di Lax Milgram sono verificate. Quindi, il problema $(ES1)$ ha un'unica soluzione, e si ha:

$$\|u\|_V \leq \frac{C_\ell}{\alpha} = \|f\|_0(C_p^2 + 1)$$

quindi si ha anche dipendenza continua dai dati (f è il solo dato del problema)

Esistenza, unicità e stabilità del problema $(ES2)$
$\left(-\Delta u + u = f \;\; in\; \Omega, \;\; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \; su \; \Gamma\right)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES2)$:

$$(PV)_2 \begin{cases} \text{Trovare } u \in H^1(\Omega): \\ \underbrace{\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f\, v}_{\ell(v)} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Applicazioni del Lemma di Lax-Milgram

Esistenza, unicità e stabilità del problema $(ES2)$
$\left(-\Delta u + u = f \ \ in\ \Omega, \ \ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ su\ \Gamma\right)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES2)$:

$$(PV)_2 \begin{cases} \text{Trovare } u \in H^1(\Omega): \\ \underbrace{\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f\, v}_{\ell(v)} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

In questo caso si ha $V = H^1(\Omega)$ e l'unica norma da usare è $\|v\|_V = \|v\|_1 := (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$.

- Linearità e continuità di $\ell(v)$: la linearità segue dalle proprietà dell'integrale, e per la continuità deve valere

$$\exists\, C_\ell > 0 \ t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

- Linearità e continuità di $\ell(v)$: la linearità segue dalle proprietà dell'integrale, e per la continuità deve valere

$$\exists\, C_\ell > 0 \ t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Nel caso considerato otteniamo (essendo $\|v\|_V = \|v\|_1$)

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f, v)_0 \underbrace{\leq \|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \underbrace{\|f\|_0 \|v\|_1}_{\|v\|_0 \leq \|v\|_1} \quad \forall v \in V.$$

- Linearità e continuità di $\ell(v)$: la linearità segue dalle proprietà dell'integrale, e per la continuità deve valere

$$\exists\, C_\ell > 0 \ t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Nel caso considerato otteniamo (essendo $\|v\|_V = \|v\|_1$)

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f, v)_0 \underbrace{\leq \|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \underbrace{\|f\|_0 \|v\|_1}_{\|v\|_0 \leq \|v\|_1} \quad \forall v \in V.$$

Quindi $\ell(v)$ è continuo e la costante di continuità è $C_\ell = \|f\|_0$

- a è bilineare per la proprietà degli integrali

- a è bilineare per la proprietà degli integrali
- continuità di a: $(|a(v,w)| \leq M\|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V)$.
  Si ha immediatamente

$$a(v,w) = (v,w)_1 \leq \|v\|_1 \|w\|_1 \qquad \text{(costante di continuità } M = 1)$$

(deriva dalla disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*).

- a è bilineare per la proprietà degli integrali
- continuità di a: $(|a(v,w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v,w \in V)$.
  Si ha immediatamente

$$a(v,w) = (v,w)_1 \leq \|v\|_1\|w\|_1 \qquad (\text{costante di continuità } \ M = 1)$$

(deriva dalla disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*).

- ellitticità di a: $(a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V)$. Si ha:

$$a(v,v) = (v,v)_1 = \|v\|_1^2 \qquad \Rightarrow \quad \alpha = 1$$

- a è bilineare per la proprietà degli integrali
- continuità di a: $(|a(v,w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall v, w \in V)$.
  Si ha immediatamente

$$a(v,w) = (v,w)_1 \leq \|v\|_1\|w\|_1 \qquad (\text{costante di continuità } \ M = 1)$$

  (deriva dalla disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*).
- ellitticità di a: $(a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V)$. Si ha:

$$a(v,v) = (v,v)_1 = \|v\|_1^2 \qquad \Rightarrow \quad \alpha = 1$$

  Quindi: il problema ha soluzione unica $u \in V$ e

$$\|u\|_1 \leq \|f\|_0.$$

- $a(v,w) = a(w,v)$ (simmetrica), quindi vale l'equivalenza col problema di minimo dell'energia.

Esistenza, unicità e stabilità del problema $(ES3)$
$(-\Delta u + u = f \;\; in \; \Omega, \;\; u = 0 \; su \; \Gamma_D, \;\; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \; su \; \Gamma_N)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES3)$:

$$(PV)_3 \begin{cases} \text{Trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) \text{ con } v = 0 \text{ su } \Gamma_D\}: \\ \underbrace{\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f\, v}_{\ell(v)} \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Applicazioni del Lemma di Lax-Milgram

Esistenza, unicità e stabilità del problema $(ES3)$
$(-\Delta u + u = f \;\; in\; \Omega, \;\; u = 0 \; su \; \Gamma_D, \;\; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \; su \; \Gamma_N)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES3)$:

$$(PV)_3 \begin{cases} \text{Trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) \text{ con } v = 0 \text{ su } \Gamma_D\}: \\ \underbrace{\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f\, v}_{\ell(v)} \quad \forall v \in V \end{cases}$$

In V possiamo scegliere la norma che preferiamo (avendo funzioni nulle su Γ_D).
Scegliamo $\|v\|_V = \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$.

Esercizio a casa: provare con la norma $\|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_0$

- V è spazio di Hilbert con $\|v\|_V = \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$

- V è spazio di Hilbert con $\|v\|_V = \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$
- a è bilineare per la proprietà degli integrali ed è continua perchè

$$a(v,w) = (v,w)_1 \le \|v\|_1 \|w\|_1 \quad \text{(costante di continuità } M = 1)$$

(deriva come al solito dalla disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*).

- V è spazio di Hilbert con $\|v\|_V = \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$
- a è bilineare per la proprietà degli integrali ed è continua perchè

$$a(v,w) = (v,w)_1 \le \|v\|_1 \|w\|_1 \quad \text{(costante di continuità } M = 1\text{)}$$

(deriva come al solito dalla disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*).
- ellitticità (definita in (3)): $a(v,v) = (v,v)_1 = \|v\|_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 1$

- V è spazio di Hilbert con $\|v\|_V = \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$
- a è bilineare per la proprietà degli integrali ed è continua perchè

$$a(v,w) = (v,w)_1 \leq \|v\|_1 \|w\|_1 \quad (\text{costante di continuità } M = 1)$$

(deriva come al solito dalla disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*).

- ellitticità (definita in (3)): $a(v,v) = (v,v)_1 = \|v\|_1^2 \qquad \Rightarrow \quad \alpha = 1$
- continuità del funzionale (definita in (2)):

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v = (f,v)_0 \leq \|f\|_0 \|v\|_0 \leq \|f\|_0 \quad \underbrace{\|v\|_V}_{\|v\|_V^2 = \|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2}$$

quindi $C_\ell = \|f\|_0$. In conclusione: soluzione unica $u \in V$ e

$$\|u\|_1 \leq \|f\|_0.$$

- $a(v,w) = a(w,v)$ (simmetrica), quindi vale l'equivalenza col problema di minimo dell'energia.

Applicazioni del Lemma di Lax-Milgram

Consideriamo il problema $(ES4)$, la cui formulazione variazionale è:

$$(PV)_4 \begin{cases} \text{trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \\ \underbrace{\int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) u\, v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f\, v}_{\ell(v)} \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Consideriamo il problema $(ES4)$, la cui formulazione variazionale è:

$$(PV)_4 \begin{cases} \text{trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \\ \underbrace{\int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) u\, v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f\, v}_{\ell(v)} \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Sappiamo che V è uno spazio di *Hilbert* sia con $\|v\|_V = \|v\|_{H^1}$ sia con $\|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}$. Scegliamo:

$$\|v\|_V = \|v\|_{H^1}$$

Consideriamo il problema $(ES4)$, la cui formulazione variazionale è:

$$(PV)_4 \begin{cases} \text{trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \\ \underbrace{\int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) u\, v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f\, v}_{\ell(v)} \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Sappiamo che V è uno spazio di *Hilbert* sia con $\|v\|_V = \|v\|_{H^1}$ sia con $\|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}$. Scegliamo:

$$\|v\|_V = \|v\|_{H^1}$$

La bilinearità di $a(\cdot,\cdot)$ e la linearità di $\ell(\cdot)$ sono immediata conseguenza delle proprietà degli integrali.

$$\boxed{a(v,w) := \int_\Omega k(\underline{x}) \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) v\, w \qquad \ell(v) := \int_\Omega f\, v}$$

- Continuità di $\ell(\cdot)$ (serve $f \in L^2$)

$$\ell(v) = (f,v)_{L^2} \le \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \le \underbrace{\|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}}_{\|v\|_{L^2} \le \|v\|_{H^1}} \qquad \forall v \in V$$

$$\boxed{a(v,w) := \int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) v\, w \qquad \ell(v) := \int_\Omega f\, v}$$

- Continuità di $\ell(\cdot)$ (serve $f \in L^2$)

$$\ell(v) = (f,v)_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} \leq \underbrace{\|f\|_{L^2}\,\|v\|_{H^1}}_{\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}} \qquad \forall v \in V$$

$(\Rightarrow \ \ C_\ell = \|f\|_{L^2})$

$$\boxed{a(v,w) := \int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) v\, w \qquad \ell(v) := \int_\Omega f\, v}$$

- Continuità di $\ell(\cdot)$ (serve $f \in L^2$)

$$\ell(v) = (f,v)_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} \le \underbrace{\|f\|_{L^2}\,\|v\|_{H^1}}_{\|v\|_{L^2} \le \|v\|_{H^1}} \qquad \forall v \in V$$

$(\Rightarrow \;\; C_\ell = \|f\|_{L^2})$

- Continuità di $a(\cdot,\cdot)$

$$\begin{aligned}
|a(v,w)| &\le \left|\int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w\right| + \left|\int_\Omega \gamma(\underline{x}) v\, w\right| \\
&= |(k(\underline{x})\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_{L^2}| + |(\gamma(\underline{x}) v, w)_{L^2}| \\
&\le \max\, |k(\underline{x})|\, \|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \|\underline{\nabla} w\|_{L^2} + \max\, |\gamma(\underline{x})|\, \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \\
&\le \underbrace{\max\, |k(\underline{x})|}_{k_{\max}}\, \|v\|_1 \|w\|_1 + \underbrace{\max\, |\gamma(\underline{x})|}_{\gamma_{\max}}\, \|v\|_1 \|w\|_1 \\
&= \{k_{\max} + \gamma_{\max}\} \|v\|_1 \|w\|_1 \qquad (M = \{k_{\max} + \gamma_{\max}\})
\end{aligned}$$

$$\boxed{a(v,w) := \int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) v\, w \qquad \ell(v) := \int_\Omega f\, v}$$

- Continuità di $\ell(\cdot)$ (serve $f \in L^2$)

$$\ell(v) = (f, v)_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \underbrace{\|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}}_{\|v\|_{L^2} \le \|v\|_{H^1}} \qquad \forall v \in V$$

($\Rightarrow \;\; C_\ell = \|f\|_{L^2}$)

- Continuità di $a(\cdot,\cdot)$

$$\begin{aligned}
|a(v,w)| &\le \left|\int_\Omega k(\underline{x})\underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w\right| + \left|\int_\Omega \gamma(\underline{x}) v\, w\right| \\
&= |(k(\underline{x})\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_{L^2}| + |(\gamma(\underline{x}) v, w)_{L^2}| \\
&\le \max|k(\underline{x})|\, \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}\|\underline{\nabla} w\|_{L^2} + \max|\gamma(\underline{x})|\, \|v\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \\
&\le \underbrace{\max|k(\underline{x})|}_{k_{\max}}\, \|v\|_1\|w\|_1 + \underbrace{\max|\gamma(\underline{x})|}_{\gamma_{\max}}\, \|v\|_1\|w\|_1 \\
&= \{k_{\max} + \gamma_{\max}\}\|v\|_1\|w\|_1 \qquad (M = \{k_{\max} + \gamma_{\max}\})
\end{aligned}$$

(Questo vale se $\max|k(\underline{x})|$ e $\max|\gamma(\underline{x})|$ sono finiti)

- Ellitticità di $a(\cdot, \cdot)$:

$$a(v, v) = \int_\Omega k(\underline{x})|\underline{\nabla} v|^2 + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) v^2$$

- Ellitticità di $a(\cdot,\cdot)$:

$$a(v,v) = \int_\Omega k(\underline{x})|\underline{\nabla} v|^2 + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) v^2$$

Per continuare, serve $k(\underline{x})$ positiva, non solo limitata, e $\gamma(\underline{x})$ non negativa. Quindi le ipotesi sui dati sono:

$$0 < k_{\min} \leq k(\underline{x}) \leq k_{\max} \qquad , \qquad 0 \leq \gamma_0 \leq \gamma(\underline{x}) \leq \gamma_{\max}$$

- Ellitticità di $a(\cdot,\cdot)$:

$$a(v,v) = \int_\Omega k(\underline{x})|\underline{\nabla} v|^2 + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) v^2$$

Per continuare, serve $k(\underline{x})$ positiva, non solo limitata, e $\gamma(\underline{x})$ non negativa. Quindi le ipotesi sui dati sono:

$$0 < k_{\min} \leq k(\underline{x}) \leq k_{\max} \qquad , \qquad 0 \leq \gamma_0 \leq \gamma(\underline{x}) \leq \gamma_{\max}$$

Se $\gamma(\underline{x}) \geq \gamma_0 > 0$ possiamo prendere $\alpha := \min\{k_{\min}, \gamma_0\}$ e avere

$$a(v,v) \geq k_{\min} \|\underline{\nabla} v\|_0^2 + \gamma_0 \|v\|_0^2 \geq \min\{k_{\min}, \gamma_0\} \|v\|_1^2$$

- Ellitticità di $a(\cdot,\cdot)$:

$$a(v,v) = \int_\Omega k(\underline{x})|\underline{\nabla} v|^2 + \int_\Omega \gamma(\underline{x}) v^2$$

Per continuare, serve $k(\underline{x})$ positiva, non solo limitata, e $\gamma(\underline{x})$ non negativa. Quindi le ipotesi sui dati sono:

$$0 < k_{\min} \le k(\underline{x}) \le k_{\max} \qquad , \qquad 0 \le \gamma_0 \le \gamma(\underline{x}) \le \gamma_{\max}$$

Se $\gamma(\underline{x}) \ge \gamma_0 > 0$ possiamo prendere $\alpha := \min\{k_{\min}, \gamma_0\}$ e avere

$$a(v,v) \ge k_{\min} \|\underline{\nabla} v\|_0^2 + \gamma_0 \|v\|_0^2 \ge \min\{k_{\min}, \gamma_0\} \|v\|_1^2$$

Se invece $\gamma_0 = 0$ si usa l'equivalenza delle norme tramite la disuguaglianza di Poincaré:

$$a(v,v) \ge k_{\min} \|\underline{\nabla} v\|_0^2 \ge \frac{k_{\min}}{C_P^2 + 1} \|v\|_1^2 \qquad \alpha = \frac{k_{\min}}{C_P^2 + 1}$$

Quindi, se i dati f, $k(\underline{x})$, $\gamma(\underline{x})$ verificano le ipotesi

$$
\begin{aligned}
& f \in L^2(\Omega) \\
& 0 < k_{\min} \le k(\underline{x}) \le k_{\max} \\
& 0 \le \gamma_0 \le \gamma(\underline{x}) \le \gamma_{\max}
\end{aligned}
$$

tutte le ipotesi del *Lemma di Lax-Milgram* sono verificate, e dunque $(PV)_4$ ha una ed una sola soluzione $u \in V$, e inoltre

$$\|u\|_V \le \frac{\|f\|_0}{\alpha}$$

Esercizio: cambio di norma in V

Nello spazio V si potrebbe scegliere come norma $\|v\|_V = \|\nabla v\|_0$, equivalente alla $\|v\|_1$ e si dovrebbe verificare il lemma di Lax-Milgram con la nuova norma.

- Continuità di a:

$$a(v,w) \leq \underbrace{k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \gamma_{\max}\|v\|_0\|w\|_0}_{per\ \ Cauchy-Schwarz}$$

Esercizio: cambio di norma in V

Nello spazio V si potrebbe scegliere come norma $\|v\|_V = \|\nabla v\|_0$, equivalente alla $\|v\|_1$ e si dovrebbe verificare il lemma di Lax-Milgram con la nuova norma.

- Continuità di a:

$$a(v,w) \leq \underbrace{k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \gamma_{\max}\|v\|_0\|w\|_0}_{per\ \ Cauchy-Schwarz}$$

$$\leq k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \underbrace{\gamma_{\max} C_P^2\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0}_{per\ Poincaré}$$

Esercizio: cambio di norma in V

Nello spazio V si potrebbe scegliere come norma $\|v\|_V = \|\nabla v\|_0$, equivalente alla $\|v\|_1$ e si dovrebbe verificare il lemma di Lax-Milgram con la nuova norma.

- Continuità di a:

$$
\begin{aligned}
a(v,w) &\le \underbrace{k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \gamma_{\max}\|v\|_0\|w\|_0}_{per\ \ Cauchy-Schwarz} \\
&\le k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \underbrace{\gamma_{\max} C_P^2\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0}_{per\ Poincaré} \\
&= (k_{\max} + \gamma_{\max} C_P^2\}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0
\end{aligned}
$$

Esercizio: cambio di norma in V

Nello spazio V si potrebbe scegliere come norma $\|v\|_V = \|\nabla v\|_0$, equivalente alla $\|v\|_1$ e si dovrebbe verificare il lemma di Lax-Milgram con la nuova norma.

- Continuità di a:

$$
\begin{aligned}
a(v, w) &\leq \underbrace{k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0 \|\underline{\nabla} w\|_0 + \gamma_{\max}\|v\|_0\|w\|_0}_{per\ \ Cauchy-Schwarz} \\
&\leq k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \underbrace{\gamma_{\max} C_P^2 \|\underline{\nabla} v\|_0 \|\underline{\nabla} w\|_0}_{per\ Poincaré} \\
&= (k_{\max} + \gamma_{\max} C_P^2\} \|\underline{\nabla} v\|_0 \|\underline{\nabla} w\|_0 \quad \Rightarrow M = k_{\max} + \gamma_{\max} C_P^2
\end{aligned}
$$

Esercizio: cambio di norma in V

Nello spazio V si potrebbe scegliere come norma $\|v\|_V = \|\nabla v\|_0$, equivalente alla $\|v\|_1$ e si dovrebbe verificare il lemma di Lax-Milgram con la nuova norma.

- Continuità di a:

$$a(v,w) \leq \underbrace{k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \gamma_{\max}\|v\|_0\|w\|_0}_{per\ \ Cauchy-Schwarz}$$

$$\leq k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \underbrace{\gamma_{\max} C_P^2 \|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0}_{per\ Poincaré}$$

$$= (k_{\max} + \gamma_{\max} C_P^2\}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 \quad \Rightarrow M = k_{\max} + \gamma_{\max} C_P^2$$

- Ellitticità di a:

$$a(v,v) \geq k_{\min}(\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} v)_0 + \gamma_0(v,v)_0 \geq k_{\min}\|\underline{\nabla} v\|_0^2 \qquad (\alpha = k_{\min})$$

Esercizio: cambio di norma in V

Nello spazio V si potrebbe scegliere come norma $\|v\|_V = \|\nabla v\|_0$, equivalente alla $\|v\|_1$ e si dovrebbe verificare il lemma di Lax-Milgram con la nuova norma.

- Continuità di a:

$$a(v,w) \leq \underbrace{k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \gamma_{\max}\|v\|_0\|w\|_0}_{per\ \ Cauchy-Schwarz}$$

$$\leq k_{\max}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 + \underbrace{\gamma_{\max} C_P^2\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0}_{per\ Poincaré}$$

$$= (k_{\max} + \gamma_{\max} C_P^2\}\|\underline{\nabla} v\|_0\|\underline{\nabla} w\|_0 \quad \Rightarrow M = k_{\max} + \gamma_{\max} C_P^2$$

- Ellitticità di a:

$$a(v,v) \geq k_{\min}(\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} v)_0 + \gamma_0(v,v)_0 \geq k_{\min}\|\underline{\nabla} v\|_0^2 \qquad (\alpha = k_{\min})$$

- Continuità di ℓ:

$$\ell(v) = (f,v)_0 \leq \|f\|_0\|v\|_0 \leq C_P\|f\|_0\,\|\nabla v\|_0 \qquad (C_\ell = C_P\|f\|_0).$$

Le ipotesi sono verificate, semplicemente con le varie costanti diverse.

Condizioni di Dirichlet non-omegenee

Esistenza e unicità della soluzione di $(ES1_g)$ $(-\Delta u = f \;\; in\; \Omega, \;\; u = g \;\; su\; \Gamma)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES1_g)$:

$$(PV)_1^g \begin{cases} \text{trovare } u \in H_g^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.c. } v = g \text{ su } \Gamma\} \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Condizioni di Dirichlet non-omegenee

Esistenza e unicità della soluzione di $(ES1_g)$ $(-\Delta u = f \ \ in\ \Omega, \ \ u = g \ \ su\ \Gamma)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES1_g)$:

$$(PV)_1^g \begin{cases} \text{trovare } u \in H_g^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.c. } \ v = g \text{ su } \Gamma\} \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

NOTA: lo spazio *trial* dove si cerca la soluzione, che qui è $H_g^1(\Omega)$, **non** è uno spazio vettoriale lineare, e inoltre è diverso dallo spazio *test* $H_0^1(\Omega)$.

Condizioni di Dirichlet non-omegenee

Esistenza e unicità della soluzione di $(ES1_g)$ $(-\Delta u = f \;\; in\; \Omega, \;\; u = g \;\; su\; \Gamma)$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES1_g)$:

$$(PV)_1^g \begin{cases} \text{trovare } u \in H_g^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.c. } \; v = g \text{ su } \Gamma\} \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

NOTA: lo spazio *trial* dove si cerca la soluzione, che qui è $H_g^1(\Omega)$, **non** è uno spazio vettoriale lineare, e inoltre è diverso dallo spazio *test* $H_0^1(\Omega)$. Per utilizzare il Lemma di Lax-Milgram bisogna procedere così : supponiamo di conoscere esplicitamente *una* funzione (*qualsiasi!*) di $H_g^1(\Omega)$. La nostra incognita u potrà quindi essere scritta come $u = u_g + u_0$ dove u_g è nota (l'abbiamo scelta noi) e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ diventa la nostra *nuova incognita*.

$$\boxed{u = u_g + u_0, \quad u_g \in H^1_g(\Omega) \text{ è nota, e } u_0 \in H^1_0(\Omega) \text{ è incognita}}$$

Con questa notazione il problema $(PV)_1^g$ diventa

$$(PV)_1^g \begin{cases} \text{trovare } u_0 \in H^1_0(\Omega), \text{ tale che :} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u_0 \cdot \underline{\nabla} v = \int_\Omega f\, v \; - \int_\Omega \underline{\nabla} u_g \cdot \underline{\nabla} v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

La differenza rispetto al caso omogeneo $(PV)_1$ è solo nel secondo membro, che qui risulta essere

$$\ell(v) := \int_\Omega f\, v \; - \int_\Omega \underline{\nabla} u_g \cdot \underline{\nabla} v.$$

$$\boxed{\ell(v) := \int_\Omega f\, v\; - \int_\Omega \underline{\nabla} u_g \cdot \underline{\nabla} v.}$$

$$\boxed{\ell(v) := \int_\Omega f\, v \;-\; \int_\Omega \underline{\nabla} u_g \cdot \underline{\nabla} v.}$$

Usando in $V := H^1_0(\Omega)$ la norma $\|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_0$ si ha:

$$|\ell(v)| \leq \left|\int_\Omega f\, v\right| + \left|\int_\Omega \underline{\nabla} u_g \cdot \underline{\nabla} v\right| \leq \underbrace{\|f\|_0 \|v\|_0 + \|\underline{\nabla} u_g\|_0 \|\underline{\nabla} v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}}$$

$$\underbrace{\leq \|f\|_0 C_p \|\underline{\nabla} v\|_0}_{\text{Poincaré}} + \|\underline{\nabla} u_g\|_0 \|\underline{\nabla} v\|_0 = \underbrace{\Big(\|f\|_0 C_p + \|\underline{\nabla} u_g\|_0\Big)}_{C_\ell} \|v\|_V$$

Il trattamento di $a(\cdot,\cdot)$ resta identico.

Esercizio: condizioni di Neumann non omogenee

$$\boxed{(ES2_g) \quad -\Delta u + u = f \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad su \quad \Gamma}$$

Esercizio: condizioni di Neumann non omogenee

$$\boxed{(ES2_g) \quad -\Delta u + u = f \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad su \quad \Gamma}$$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES2_g)$:

$$(PV)_2^g \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v + \int_{\partial\Omega} g\, v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Esercizio: condizioni di Neumann non omogenee

$$\boxed{(ES2_g) \quad -\Delta u + u = f \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad su \quad \Gamma}$$

Ricordiamo la formulazione variazionale di $(ES2_g)$:

$$(PV)_2^g \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v + \int_{\partial\Omega} g\, v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

L'unica cosa che cambia rispetto a $(PV)_2$ è il termine noto. Si ha:

$$|\ell(v)| \le \left| \int_\Omega f\, v \right| + \left| \int_{\partial\Omega} g\, v \right| \le \underbrace{\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}}_{\text{Cauchy-Schwarz}}$$

$$\le \underbrace{\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\, \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right)}_{C_\ell} \|v\|_V$$

Richiesto atto di fede: $\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C \|v\|_{H^1(\Omega)}$