Pde's del secondo ordine

Vedremo equazioni differenziali del secondo ordine **lineari** e a **coefficienti costanti**. Se x e y sono le variabili indipendenti, la scrittura generale è

$$\underbrace{au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}}_{\text{parte principale}} + \cdots\cdots = 0$$

a, b, c: coefficienti, "$\cdots$": termini con derivate di u di ordine inferiore.

Pde's del secondo ordine

Vedremo equazioni differenziali del secondo ordine **lineari** e a **coefficienti costanti**. Se x e y sono le variabili indipendenti, la scrittura generale è

$$\underbrace{au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}}_{\text{parte principale}} + \cdots\cdots = 0$$

a, b, c: coefficienti, "$\cdots$": termini con derivate di u di ordine inferiore. Queste equazioni sono di tre tipi: *ellittiche, paraboliche e iperboliche*, in base al comportamento della parte principale. Con la sostituzione

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \to x^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \to y^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \to xy,$$

si ottiene l'equazione di una conica (anche se degenere):

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

$$\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0}$$

$$\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0}$$

Il tipo di curva è dato dal discriminante:

- Se $b^2 - ac < 0$ si ha un'ellisse $\rightarrow$ equazione ellittica
- Se $b^2 - ac = 0$ si ha una parabola $\rightarrow$ equazione parabolica
- Se $b^2 - ac > 0$ si ha un'iperbole $\rightarrow$ equazione iperbolica

$$\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0}$$

Il tipo di curva è dato dal discriminante:

- Se $b^2 - ac < 0$ si ha un'ellisse $\rightarrow$ equazione ellittica
- Se $b^2 - ac = 0$ si ha una parabola $\rightarrow$ equazione parabolica
- Se $b^2 - ac > 0$ si ha un'iperbole $\rightarrow$ equazione iperbolica

Esempio 1: prototipo di equazione ellittica, problema di Poisson

$$-\Delta u = f$$

dove f è nota, e Δ è l'operatore di Laplace (o Laplaciano):

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy}$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = -1, b = 0, c = -1$, il discriminante è -1, e dunque l'equazione di Laplace è ellittica e stazionaria (l'incognita non dipende dal tempo). ($x^2 + y^2 = 0$ è l'equazione di un'ellisse degenere: un punto isolato).

Esempio 2: prototipo di equazione iperbolica, equazione delle onde

$$u_{tt} - u_{xx} = f$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = 1, b = 0, c = -1$, il discriminante è $+1$, e dunque l'equazione delle onde è iperbolica e evolutiva (la soluzione dipende anche dal tempo). ($t^2 - x^2 = 0$ è l'equazione di un'iperbole degenere: due rette distinte).

Esempio 2: prototipo di equazione iperbolica, equazione delle onde

$$u_{tt} - u_{xx} = f$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = 1, b = 0, c = -1$, il discriminante è $+1$, e dunque l'equazione delle onde è iperbolica e evolutiva (la soluzione dipende anche dal tempo). ($t^2 - x^2 = 0$ è l'equazione di un'iperbole degenere: due rette distinte).

Esempio 3: prototipo di equazione parabolica, equazione del calore

$$u_t - u_{xx} = f$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = -1, b = 0, c = 0$, il discriminante è 0, e dunque l'equazione del calore è parabolica e ovviamente evolutiva. ($x^2 = 0$ è l'equazione di una parabola degenere: una retta doppia).

Equazione delle onde o di D'Alembert (1746)

(propagazione delle onde in una corda elastica infinita)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0$$

$c =$ è una costante con le dimensioni di una velocità. Infatti, svolgendo l'analisi dimensionale si vede che:

$$u_{tt} : [u] \cdot [t^{-2}],\ u_{xx} : [u] \cdot [\ell^{-2}],\ \longrightarrow\ [c]^2 : [\ell]^2[t]^{-2}$$

(propagazione delle onde in una corda elastica infinita)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0$$

$c =$ è una costante con le dimensioni di una velocità. Infatti, svolgendo l'analisi dimensionale si vede che:

$$u_{tt} : [u] \cdot [t^{-2}],\ u_{xx} : [u] \cdot [\ell^{-2}],\ \longrightarrow\ [c]^2 : [\ell]^2 [t]^{-2}$$

All'equazione differenziale bisogna aggiungere due condizioni iniziali: ampiezza e velocità iniziali dell'onda. Quindi si considera il problema di Cauchy per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Calcolo soluzione

$$\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0}$$

Calcolo soluzione

$$\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0}$$

Usando $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b) = (a + b)(a - b)$, nell'equazione differenziale:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0,$$

Calcolo soluzione

$$\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0}$$

Usando $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b) = (a + b)(a - b)$, nell'equazione differenziale:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0,$$

o anche

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad (*)$$

Calcolo soluzione

$$\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0}$$

Usando $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b) = (a+b)(a-b)$, nell'equazione differenziale:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0,$$

o anche

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad (*)$$

Quindi ogni funzione v che risolve l'equazione di trasporto:

$$v_t - c v_x = 0$$

risolverà anche l'equazione $(*)$.

$$\boxed{v_t - c v_x = 0 \quad \text{eq. trasporto}}$$

$$\boxed{v_t - c v_x = 0 \quad \text{eq. trasporto}}$$

Sappiamo che lungo le caratteristiche $\dfrac{dx}{dt} = -c$ la funzione v è costante.

$$\frac{dx}{dt} = -c \Rightarrow x = x(t) = -ct + x_0$$

in cui x_0 è il punto di intersezione con l'asse delle x. Per risolvere l'equazione di trasporto basterà che $v(x, t)$ sia costante lungo le caratteristiche e pari al suo valore all'istante iniziale:

$$v(x, t) = \varphi(x_0) = \varphi(x + ct)$$

dove φ è una funzione da trovare imponendo le condizioni iniziali.

$$\boxed{v_t - cv_x = 0 \quad \text{eq. trasporto}}$$

Sappiamo che lungo le caratteristiche $\dfrac{dx}{dt} = -c$ la funzione v è costante.

$$\frac{dx}{dt} = -c \Rightarrow x = x(t) = -ct + x_0$$

in cui x_0 è il punto di intersezione con l'asse delle x. Per risolvere l'equazione di trasporto basterà che $v(x,t)$ sia costante lungo le caratteristiche e pari al suo valore all'istante iniziale:

$$v(x,t) = \varphi(x_0) = \varphi(x+ct)$$

dove φ è una funzione da trovare imponendo le condizioni iniziali. In particolare abbiamo trovato che: per ogni funzione φ di una variabile, abbastanza regolare, la scelta $u := \varphi(x+ct)$ dà una soluzione della equazione delle onde $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. (fare la verifica!)

Poiché

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,$$

si ha anche:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad (**)$$

Poiché

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,$$

si ha anche:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad (**)$$

Quindi ogni funzione w che risolve l'equazione di trasporto:

$$w_t + cw_x = 0$$

risolverà anche l'equazione $(**)$.

$$\boxed{w_t + c w_x = 0 \quad \text{eq. di trasporto}}$$

$$\boxed{w_t + c w_x = 0 \quad \text{eq. di trasporto}}$$

Sappiamo che lungo le caratteristiche $\dfrac{dx}{dt} = c$ la funzione w è costante.

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow x = x(t) = ct + x_0$$

in cui x_0 è il punto di intersezione con l'asse delle x. Per risolvere l'equazione di trasporto basterà che $w(x,t)$ sia costante lungo le caratteristiche e pari al suo valore all'istante iniziale:

$$w(x,t) = \psi(x_0) = \psi(x - ct)$$

dove ψ è una funzione da trovare imponendo le condizioni iniziali.

$$\boxed{w_t + c w_x = 0 \quad \text{eq. di trasporto}}$$

Sappiamo che lungo le caratteristiche $\frac{dx}{dt} = c$ la funzione w è costante.

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow x = x(t) = ct + x_0$$

in cui x_0 è il punto di intersezione con l'asse delle x. Per risolvere l'equazione di trasporto basterà che $w(x,t)$ sia costante lungo le caratteristiche e pari al suo valore all'istante iniziale:

$$w(x,t) = \psi(x_0) = \psi(x - ct)$$

dove ψ è una funzione da trovare imponendo le condizioni iniziali. In particolare abbiamo trovato che: per ogni funzione ψ di una variabile, abbastanza regolare, la scelta $u := \psi(x - ct)$ dà una soluzione della equazione delle onde $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. (fare la verifica!)

$u(x,t) = \varphi(x+ct)$ e $u(x,t) = \psi(x-ct)$ verificano entrambe l'equazione differenziale.
Quindi possiamo cercare la soluzione del problema delle onde come sovrapposizione delle due onde $u(x,t) = \varphi(x+ct)$ e $u(x,t) = \psi(x-ct)$:

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

$u(x,t) = \varphi(x+ct)$ e $u(x,t) = \psi(x-ct)$ verificano entrambe l'equazione differenziale.
Quindi possiamo cercare la soluzione del problema delle onde come sovrapposizione delle due onde $u(x,t) = \varphi(x+ct)$ e $u(x,t) = \psi(x-ct)$:

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Per trovare φ e ψ sfruttiamo le condizioni iniziali:

1. $u(x,0) = u_0(x) \to \varphi(x) + \psi(x) = u_0(x)$

$u(x,t) = \varphi(x+ct)$ e $u(x,t) = \psi(x-ct)$ verificano entrambe l'equazione differenziale.
Quindi possiamo cercare la soluzione del problema delle onde come sovrapposizione delle due onde $u(x,t) = \varphi(x+ct)$ e $u(x,t) = \psi(x-ct)$:

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Per trovare φ e ψ sfruttiamo le condizioni iniziali:

1. $u(x,0) = u_0(x) \to \varphi(x) + \psi(x) = u_0(x)$
2. $u_t(x,0) = u_1(x) \to c\varphi'(x) + (-c)\psi'(x) = u_1(x)$.

$u(x,t) = \varphi(x+ct)$ e $u(x,t) = \psi(x-ct)$ verificano entrambe l'equazione differenziale.
Quindi possiamo cercare la soluzione del problema delle onde come sovrapposizione delle due onde $u(x,t) = \varphi(x+ct)$ e $u(x,t) = \psi(x-ct)$:

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Per trovare φ e ψ sfruttiamo le condizioni iniziali:

1. $u(x,0) = u_0(x) \to \varphi(x) + \psi(x) = u_0(x)$
2. $u_t(x,0) = u_1(x) \to c\varphi'(x) + (-c)\psi'(x) = u_1(x)$.

Abbiamo un sistema di due equazioni in due incognite (φ e ψ):

$$\begin{cases} \varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) \\ c[u_0'(x) - \psi'(x) - \psi'(x)] = u_1(x) \to c[u_0'(x) - 2\psi'(x)] = u_1(x) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) \\ \psi'(x) = \dfrac{1}{2}u_0'(x) - \dfrac{1}{2c}u_1(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) \\ \psi'(x) = \dfrac{1}{2} u_0'(x) - \dfrac{1}{2c} u_1(x) \end{cases}$$

Integrando tra x_0 e x la seconda equazione si ha

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \frac{1}{2}[u_0(x) - u_0(x_0)] - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x} u_1(s) ds$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) \\ \psi'(x) = \frac{1}{2}u_0'(x) - \frac{1}{2c}u_1(x) \end{cases}$$

Integrando tra x_0 e x la seconda equazione si ha

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \frac{1}{2}[u_0(x) - u_0(x_0)] - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(s)ds$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(s)ds + k,$$

avendo posto $k = \psi(x_0) - \frac{1}{2}u_0(x_0)$ (che dipende solo da x_0).

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(s)ds + k}$$

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(s)ds + k}$$

$$\varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(s)ds - k.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} u_1(s)ds - k \\ &+ \frac{1}{2}u_0(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} u_1(s)ds + k \end{aligned}$$

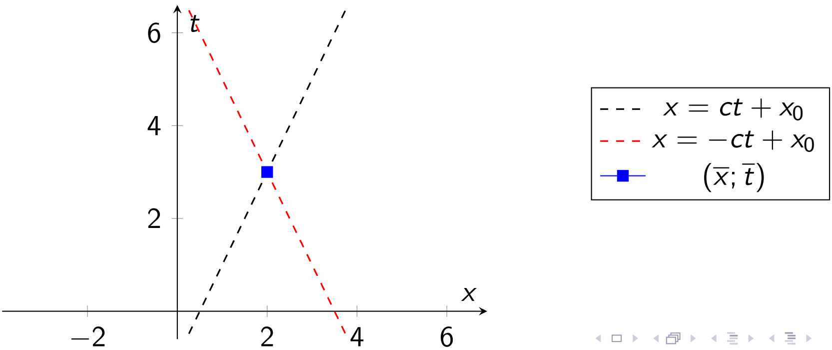
Quindi la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione delle onde (1) è:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds}$$

FORMULA DI D'ALEMBERT

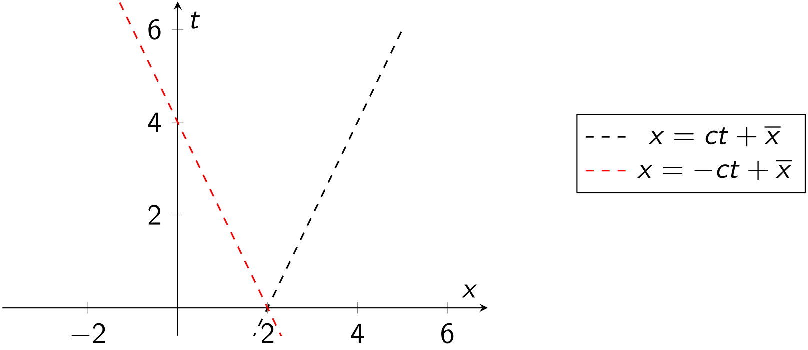
Dominio di dipendenza

Dalla formula di D'Alembert si vede che la soluzione in un punto $(\overline{x}, \overline{t})$ dipende dai valori del dato u_0 nelle due intersezioni, con l'asse delle x, delle due caratteristiche passanti per $(\overline{x}, \overline{t})$, e dipende anche dai valori della velocità iniziale in tutto l'intervallo $[\overline{x} - c\overline{t}, \overline{x} + c\overline{t}]$. Il triangolo disegnato si chiama **dominio di dipendenza**: in tutto l'insieme di quei punti, la soluzione $u(x, t)$ dipende dai valori di u_0 e di u_1 nell'intervallo $[\overline{x} - c\overline{t}, \overline{x} + c\overline{t}]$.



Dominio di influenza

Se si prende un punto $\overline{x}$ sull'asse x da cui partono due caratteristiche $x = -ct + \overline{x}$, $x = ct + \overline{x}$:



si vede che $u_0(\overline{x})$ e $u_1(\overline{x})$ influenzano i valori di $u(x,t)$ in tutto lo spazio tra le due caratteristiche uscenti da $\overline{x}$; l'insieme di tutti quei punti viene chiamato **dominio di influenza**.

Come si propaga una perturbazione in $\overline{x}$? Dopo quanto tempo la si avverte?
La perturbazione si propaga lungo le due caratteristiche con velocità c.
Essa sarà avvertita nella posizione $x^* =$ dopo un tempo t^* dato da :

$$t^* = \frac{|x^* - \overline{x}|}{c}$$

da cui si evince che se c è grande, il tempo in cui si avverte la perturbazione è piccolo; viceversa se c è piccolo, il tempo in cui verrà avvertita la perturbazione sarà grande (come ci si aspetta a buon senso).

Conclusioni: il problema considerato è ben posto (stabile)

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds}$$

Conclusioni: il problema considerato è ben posto (stabile)

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds}$$

1. Esistenza soluzione: abbiamo una soluzione in forma analitica

Conclusioni: il problema considerato è ben posto (stabile)

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds}$$

1. Esistenza soluzione: abbiamo una soluzione in forma analitica
2. Unicità per contraddizione: si suppone che esistano due soluzioni $u^{(1)} \neq u^{(2)}$ dello stesso problema (cioè con gli stessi dati iniziali); si fa la differenza tra i due problemi e si vede che la funzione differenza $w(x,t) = u^{(1)} - u^{(2)}$ risolve il problema delle onde con dati iniziali pari a 0. Dalla formula di D'Alembert si ha quindi $w(x,t) = u^{(1)} - u^{(2)} = 0$ che rappresenta la contraddizione (esattamente lo stesso procedimento usato finora negli altri casi).

Conclusioni: il problema considerato è ben posto (stabile)

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds}$$

1. Esistenza soluzione: abbiamo una soluzione in forma analitica
2. Unicità per contraddizione: si suppone che esistano due soluzioni $u^{(1)} \neq u^{(2)}$ dello stesso problema (cioè con gli stessi dati iniziali); si fa la differenza tra i due problemi e si vede che la funzione differenza $w(x,t) = u^{(1)} - u^{(2)}$ risolve il problema delle onde con dati iniziali pari a 0. Dalla formula di D'Alembert si ha quindi $w(x,t) = u^{(1)} - u^{(2)} = 0$ che rappresenta la contraddizione (esattamente lo stesso procedimento usato finora negli altri casi).
3. Stabilità: ancora conseguenza della formula di D'Alembert: la soluzione è una funzione continua dei dati e quindi dipende in modo continuo dai dati.

Esercizio: (alla lavagna)

$$(P)\begin{cases} u_{tt} - 36u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \cos(\pi x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Trovare la soluzione: $u = u(x,t) =?$

Esercizio: (alla lavagna)

$$(P)\begin{cases} u_{tt} - 16u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x,0) = \cos(\pi x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin(\pi x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Trovare la soluzione: $u = u(x,t) =?$

Equazione delle onde per una corda di lunghezza finita L

In questo caso si ha un *problema ai limiti*: la presenza di u_{xx} richiede condizioni agli estremi dell'intervallo.
Per semplicità fissiamo $u = 0$ agli estremi.

Equazione delle onde per una corda di lunghezza finita L

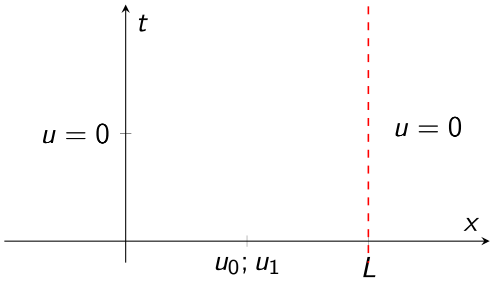
In questo caso si ha un *problema ai limiti*: la presenza di u_{xx} richiede condizioni agli estremi dell'intervallo.
Per semplicità fissiamo $u = 0$ agli estremi.
Il problema diventa:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in [0; L] \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in [0; L] \\ u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Equazione delle onde per una corda di lunghezza finita L

In questo caso si ha un *problema ai limiti*: la presenza di u_{xx} richiede condizioni agli estremi dell'intervallo.
Per semplicità fissiamo $u = 0$ agli estremi.
Il problema diventa:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in [0; L] \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in [0; L] \\ u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{cases} \tag{2}$$



Esistenza di una soluzione

Nota: date $u_0(x)$ e $u_1(x)$ su $(0, L)$, possiamo facilmente ricostruire, per $t = 0$, e per ogni $x_0 \in (0, L)$, le due funzioni φ e ψ, costanti lungo $x = x_0 - ct$ e $x = x_0 + ct$ rispettivamente.

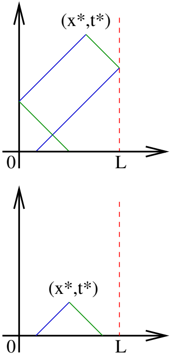


Figura: Caratteristiche: $\varphi(x + ct) = costante, \psi(x - ct) = costante$

Stabilità

Si moltiplica l'equazione differenziale per u_t e si integra tra 0 ed L:

$$u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0 \ \Rightarrow \ \int_0^L u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})dx = 0.$$

Stabilità

Si moltiplica l'equazione differenziale per u_t e si integra tra 0 ed L:

$$u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0 \;\Rightarrow\; \int_0^L u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})dx = 0.$$

Ricordando che $u_t u_{tt} = \frac{1}{2}\frac{\partial (u_t)^2}{\partial t}$, si può scrivere:

$$\begin{aligned}\int_0^L \left(\frac{1}{2}\frac{\partial (u_t^2)}{\partial t} - c^2 u_t u_{xx}\right)dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L u_t^2(x,t)dx \\ - c^2 \int_0^L u_t(x,t)u_{xx}(x,t)dx = 0\end{aligned}$$

Svolgendo per parti il secondo integrale si ottiene:

$$\int_0^L u_t(x,t)\, u_{xx}(x,t)dx = -\int_0^L u_{tx}(x,t)\, u_x(x,t)dx + \Big[u_t(x,t)\, u_x(x,t) \Big]_{x=0}^{x=L}$$

Poichè $u(0,t) = u(L,t) = 0$ per ogni t, si avrà anche che $u_t(0,t) = u_t(L,t) = 0$ e quindi il termine tra parentesi quadra è uguale a zero (sempre per ogni t).

Ricordando che $u_x(x,t)\, u_{xt}(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial (u_x)^2}{\partial t}$ si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L ((u_t(x,t))^2 + c^2(u_x(x,t))^2)dx = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L ((u_t(x,t))^2 + c^2(u_x(x,t))^2)dx = 0}$$

Posto

$$E(t) := \int_0^L ((u_t(x,t))^2 + c^2(u_x(x,t))^2)dx,$$

si ha quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(E(t)) = 0 \Rightarrow E'(t) = 0 \Rightarrow E(t) = costante = E(0),$$

cioè l'energia iniziale del sistema si conserva. Da qui deriva la denominazione di *equazioni conservative* con cui vengono denotate le equazioni di questo tipo.

Stabilità

$$\boxed{E(t) := \int_0^L ((u_t(x,t))^2 + c^2(u_x(x,t))^2)dx}$$

Stabilità

$$\boxed{E(t) := \int_0^L ((u_t(x,t))^2 + c^2(u_x(x,t))^2)dx}$$

Da $E(t) = costante = E(0)$ si deduce che, se i dati iniziali sono limitati, l'energia sarà limitata, e per ogni istante t essa sarà uguale all'energia iniziale. Si ha quindi **la stabilità**:

$$\int_0^L [u_t^2(x,t)+c^2u_x^2(x,t)]dx = E(t) = E(0) = \int_0^L [(u_1(x))^2+c^2(u_0'(x))^2]dx$$

Stabilità

$$\boxed{E(t) := \int_0^L ((u_t(x,t))^2 + c^2(u_x(x,t))^2)dx}$$

Da $E(t) = costante = E(0)$ si deduce che, se i dati iniziali sono limitati, l'energia sarà limitata, e per ogni istante t essa sarà uguale all'energia iniziale. Si ha quindi **la stabilità**:

$$\int_0^L [u_t^2(x,t)+c^2u_x^2(x,t)]dx = E(t) = E(0) = \int_0^L [(u_1(x))^2+c^2(u_0'(x))^2]dx$$

In particolare vediamo che, se i dati iniziali $u_0(x)$ e $u_1(x)$ sono entrambi nulli, l'energia iniziale (cioè al tempo zero) sarà nulla, e tale sarà anche l'energia per ogni tempo t.

Unicità

L'ultima osservazione ci permette di dedurre l'unicità della soluzione. Infatti, per linearità, se avessimo due soluzioni $u^{(1)}(x,t)$ e $u^{(2)}(x,t)$ con gli stessi dati, la differenza w risolverebbe un problema con dati uguali a zero, e l'energia associata a w sarebbe nulla per ogni tempo t:

$$E_w(t) = \int_0^L [w_t^2 + c^2 w_x^2] dx = E_w(0) = 0.$$

Unicità

L'ultima osservazione ci permette di dedurre l'unicità della soluzione. Infatti, per linearità, se avessimo due soluzioni $u^{(1)}(x,t)$ e $u^{(2)}(x,t)$ con gli stessi dati, la differenza w risolverebbe un problema con dati uguali a zero, e l'energia associata a w sarebbe nulla per ogni tempo t:

$$E_w(t) = \int_0^L [w_t^2 + c^2 w_x^2] dx = E_w(0) = 0.$$

Ma l'energia è l'integrale di una somma di quadrati, e quindi sarà nulla se e solo se entrambi i termini w_t e w_x sono identicamente nulli, che (tenendo conto dei dati iniziali e al contorno) ci dice che la w stessa è identicamente uguale a zero.
Quindi $u^{(1)} = u^{(2)}$ e l'unicità è dimostrata.

Estensione a più dimensioni

Richiami: definizioni e proprietà utili per il seguito.

• Operatore di Laplace (o Laplaciano): $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ in $2D$

(somma delle derivate parziali seconde rispetto alle 2 variabili indipendenti). In 3 dimensioni spaziali sarebbe $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ma qui considereremo solo problemi in 2 dimensioni spaziali).

Estensione a più dimensioni

Richiami: definizioni e proprietà utili per il seguito.

• Operatore di Laplace (o Laplaciano): $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ in $2D$

(somma delle derivate parziali seconde rispetto alle 2 variabili indipendenti). In 3 dimensioni spaziali sarebbe $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ma qui considereremo solo problemi in 2 dimensioni spaziali).

• Gradiente: indicato con ∇ (si legge *nabla*), è un operatore differenziale che si applica ad una funzione, cioè ad una variabile scalare, e restituisce come risultato un vettore:

$$u = u(x, y) \;\to\; \nabla u(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \; \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

• Divergenza: è un operatore differenziale che si applica ad un vettore e restituisce uno scalare come risultato:

$$\underline{V} = (V_1, V_2) \Rightarrow div\,\underline{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

• Divergenza: è un operatore differenziale che si applica ad un vettore e restituisce uno scalare come risultato:

$$\underline{V} = (V_1, V_2) \Rightarrow div\,\underline{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

Se: $\underline{V} = (u_x,\, u_y) = \underline{\nabla} u$ segue che:

$$div(\underline{\nabla} u) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u$$

• Divergenza: è un operatore differenziale che si applica ad un vettore e restituisce uno scalare come risultato:

$$\underline{V} = (V_1, V_2) \Rightarrow div\,\underline{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

Se: $\underline{V} = (u_x,\ u_y) = \underline{\nabla} u$ segue che:

$$div(\underline{\nabla} u) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u$$

• Prodotto scalare: se $\underline{U} = (U_1, U_2)$ e $\underline{V} = (V_1, V_2)$ sono due vettori, il prodotto scalare è dato da

$$(\underline{U}, \underline{V})(= \underline{U} \cdot \underline{V}) = U_1 V_1 + U_2 V_2$$

Teorema della divergenza di Gauss: dato un vettore $\underline{V}$ definito in un dominio D, si ha:

$$\int_D div \underline{V} dxdy = \int_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n} ds \qquad (TD)$$

in cui $\underline{n} = (n_x, n_y)$ è il versore della normale uscente dal bordo.

Teorema della divergenza di Gauss: dato un vettore $\underline{V}$ definito in un dominio D, si ha:

$$\int_D div\,\underline{V}\,dxdy = \int_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n} ds \qquad (TD)$$

in cui $\underline{n} = (n_x, n_y)$ è il versore della normale uscente dal bordo.

Formula di Gauss-Green: è un estensione del Teorema della divergenza di Gauss. Dati un vettore $\underline{V}$, e una funzione φ, entrambi differenziabili, si ha:

$$\int_D div\,\underline{V}\,\varphi\,dxdy = -\int_D \underline{V} \cdot \underline{\nabla}\varphi\,dxdy + \int_{\partial D} \varphi \underline{V} \cdot \underline{n}\,ds \qquad (GG)$$

Dimostrazione: Applicando (TD) al vettore $\underline{V}\,\varphi$ si ha

$$\int_D div(\underline{V}\,\varphi)dxdy = \int_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n}\,\varphi ds.$$

D'altra parte, sviluppando $div(\underline{V}\,\varphi)$ si ha

$$div(\underline{V}\,\varphi) = (div\,\underline{V})\,\varphi + \underline{V} \cdot \underline{\nabla}\varphi$$

che sostituito nell'integrale a sinistra porta a (GG).

IMPORTANTE: Usando la formula di Gauss-Green si ottiene (per ogni coppia di funzioni regolari u e v)

$$\int_D \Delta u \, v \, dxdy = \int_D div(\underline{\nabla} u) \, v \, dxdy = -\int_D \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, dxdy + \int_{\partial D} v \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} \, ds$$

IMPORTANTE: Usando la formula di Gauss-Green si ottiene (per ogni coppia di funzioni regolari u e v)

$$\int_D \Delta u\, v\, dxdy = \int_D div(\underline{\nabla} u)\, v\, dxdy = -\int_D \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v\, dxdy + \int_{\partial D} v \underline{\nabla} u \cdot \underline{n}\, ds$$

cioè:

$$\boxed{\int_D (\Delta u\, v + \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v) dxdy = \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} ds} \qquad (GG)$$

avendo usato, nell'ultimo passaggio

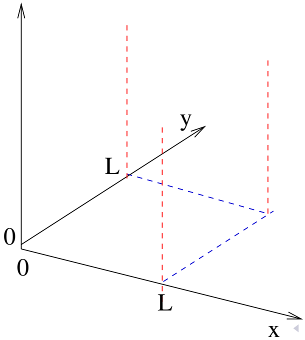
$$\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(ny) = u_x n_x + u_y n_y = \frac{\partial u}{\partial n}$$

Estensione dell'eq. delle onde ad un campo bidimensionale

Sia Q il quadrato $Q = [0; L] \times [0; L]$. Si cerca una funzione $u = u(x, y, t)$ soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \qquad (x, y) \in Q \qquad t > 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \qquad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y) \qquad \forall x, y \in Q \\ u(\cdot, t) = 0 \qquad \text{su } \Gamma = \partial Q, \quad \forall t \end{cases}$$

$\Gamma = \partial Q$ rappresenta il bordo del quadrato Q.



Studio del problema

Questo problema studia le vibrazioni in una membrana elastica che in questo caso è rappresentata dal quadrato Q.

Studio del problema

Questo problema studia le vibrazioni in una membrana elastica che in questo caso è rappresentata dal quadrato Q.

- Esistenza: (complicata e la diamo per buona)

Studio del problema

Questo problema studia le vibrazioni in una membrana elastica che in questo caso è rappresentata dal quadrato Q.

• Esistenza: (complicata e la diamo per buona)

• Stabilità: Si moltiplica l'equazione differenziale per u_t e, per ogni t, si integra rispetto a x e a y su tutto Q:

$$u_t(u_{tt} - c^2 \Delta u) = 0 \to \int_Q u_t(u_{tt} - c^2 \Delta u) dxdy = 0$$

da cui:

$$\int_Q u_t \, u_{tt} \, dxdy - c^2 \int_Q u_t \, \Delta u \, dxdy = 0$$

Studio del problema

Questo problema studia le vibrazioni in una membrana elastica che in questo caso è rappresentata dal quadrato Q.

• Esistenza: (complicata e la diamo per buona)

• Stabilità: Si moltiplica l'equazione differenziale per u_t e, per ogni t, si integra rispetto a x e a y su tutto Q:

$$u_t(u_{tt} - c^2\Delta u) = 0 \to \int_Q u_t(u_{tt} - c^2\Delta u)dxdy = 0$$

da cui:

$$\int_Q u_t\, u_{tt}\, dxdy - c^2 \int_Q u_t\, \Delta u\, dxdy = 0$$

Si ha che:

1. $u_t u_{tt} = \frac{1}{2}\frac{\partial(u_t^2)}{\partial t} = 2u_t\frac{\partial u_t}{\partial t}\frac{1}{2}$

Studio del problema

Questo problema studia le vibrazioni in una membrana elastica che in questo caso è rappresentata dal quadrato Q.

- Esistenza: (complicata e la diamo per buona)
- Stabilità: Si moltiplica l'equazione differenziale per u_t e, per ogni t, si integra rispetto a x e a y su tutto Q:

$$u_t(u_{tt} - c^2\Delta u) = 0 \to \int_Q u_t(u_{tt} - c^2\Delta u)dxdy = 0$$

da cui:

$$\int_Q u_t\, u_{tt}\, dxdy - c^2 \int_Q u_t\, \Delta u\, dxdy = 0$$

Si ha che:

1. $u_t u_{tt} = \frac{1}{2}\frac{\partial(u_t^2)}{\partial t} = 2u_t\frac{\partial u_t}{\partial t}\frac{1}{2}$
2. per il secondo integrale bisogna usare le formule di *Gauss-Green* (GG):

$$\int_Q u_t \Delta u\, dxdy = -\int_Q \underline{\nabla} u_t \cdot \underline{\nabla} u\, dxdy + \int_{\partial Q} u_t \underline{\nabla} u \cdot \underline{n}\, ds$$

$\int_{\partial Q} u_t \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} \, ds = 0$ poichè su ∂Q si ha $u = 0$ per ogni t e quindi anche $u_t = 0$ per ogni t.

$\int_{\partial Q} u_t \underline{\nabla} u \cdot \underline{n}\, ds = 0$ poichè su ∂Q si ha $u = 0$ per ogni t e quindi anche $u_t = 0$ per ogni t. Quindi $\int_Q u_t\, u_{tt}\, dxdy - c^2 \int_Q u_t\, \Delta u\, dxdy = 0$ diventa

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_Q (u_t)^2 dxdy + c^2 \int_Q \underline{\nabla} u_t \cdot \underline{\nabla} u\, dxdy = 0$$

$\int_{\partial Q} u_t \underline{\nabla} u \cdot \underline{n}\, ds = 0$ poichè su ∂Q si ha $u = 0$ per ogni t e quindi anche $u_t = 0$ per ogni t. Quindi $\int_Q u_t\, u_{tt}\, dxdy - c^2 \int_Q u_t\, \Delta u\, dxdy = 0$ diventa

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_Q (u_t)^2 dxdy + c^2 \int_Q \underline{\nabla} u_t \cdot \underline{\nabla} u\, dxdy = 0$$

Sapendo che $\nabla u_t \cdot \nabla u = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}|\underline{\nabla} u|^2$ si ha infine:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_Q (u_t^2 + c^2|\underline{\nabla} u|^2)\, dxdy}_{E(t)} = 0$$

$\int_{\partial Q} u_t \underline{\nabla} u \cdot \underline{n}\, ds = 0$ poichè su ∂Q si ha $u = 0$ per ogni t e quindi anche $u_t = 0$ per ogni t. Quindi $\int_Q u_t\, u_{tt}\, dxdy - c^2 \int_Q u_t\, \Delta u\, dxdy = 0$ diventa

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_Q (u_t)^2 dxdy + c^2 \int_Q \underline{\nabla} u_t \cdot \underline{\nabla} u\, dxdy = 0$$

Sapendo che $\nabla u_t \cdot \nabla u = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\underline{\nabla} u|^2$ si ha infine:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_Q (u_t^2 + c^2|\underline{\nabla} u|^2)\, dxdy}_{E(t)} = 0$$

Si ha quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(E(t)) = 0 \Rightarrow E'(t) = 0 \Rightarrow E(t) = costante = E(0),$$

cioè l'energia iniziale del sistema si conserva e si procede come abbiamo fatto in una dimensione spaziale per la corda.