Equazioni differenziali - generalità

Le equazioni differenziali sono equazioni nelle quali
1) l'incognita è una funzione, e
2) nella equazione compaiono anche alcune *derivate* della funzione incognita.

Equazioni differenziali - generalità

Le equazioni differenziali sono equazioni nelle quali
1) l'incognita è una funzione, e
2) nella equazione compaiono anche alcune *derivate* della funzione incognita.

Si dice che un'equazione differenziale ha ordine m se la derivata di ordine massimo che compare nella equazione è una derivata di ordine m.

Equazioni differenziali - generalità

Le equazioni differenziali sono equazioni nelle quali
1) l'incognita è una funzione, e
2) nella equazione compaiono anche alcune *derivate* della funzione incognita.

Si dice che un'equazione differenziale ha ordine m se la derivata di ordine massimo che compare nella equazione è una derivata di ordine m.

Se la funzione incognita è una funzione di una sola variabile, le sue derivate saranno derivate ordinarie e si parlerà di *equazione differenziale ordinaria (ODE)*.

Equazioni differenziali - generalità

Le equazioni differenziali sono equazioni nelle quali
1) l'incognita è una funzione, e
2) nella equazione compaiono anche alcune *derivate* della funzione incognita.

Si dice che un'equazione differenziale ha ordine m se la derivata di ordine massimo che compare nella equazione è una derivata di ordine m.

Se la funzione incognita è una funzione di una sola variabile, le sue derivate saranno derivate ordinarie e si parlerà di *equazione differenziale ordinaria (ODE)*.

Se invece la funzione incognita è una funzione di più variabili, le sue derivate saranno derivate parziali e si parlerà di *equazione differenziale alle derivate parziali(PDE)*

Esempio: $$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita)

Esempio: $$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione differenziale ordinaria di ordine 2.

Esempio: $$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione differenziale ordinaria di ordine 2.

Esempio: $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x,t)$$

Esempio: $$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione differenziale ordinaria di ordine 2.

Esempio: $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x,t)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita)

Esempio: $$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione differenziale ordinaria di ordine 2.

Esempio: $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x,t)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione alle derivate parziali del primo ordine (infatti nella equazione compaiono solo derivate prime).

Esempio: $$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione differenziale ordinaria di ordine 2.

Esempio: $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x,t)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione alle derivate parziali del primo ordine (infatti nella equazione compaiono solo derivate prime).

altri modi di scrivere la stessa equazione: $u_t + u_x = g$
($u_t = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, oppure $u_{/t} + u_{/x} = g$, oppure $u_{,t} + u_{,x} = g$
tutte con lo stesso significato.)

Esempio: $$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione differenziale ordinaria di ordine 2.

Esempio: $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x,t)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione alle derivate parziali del primo ordine (infatti nella equazione compaiono solo derivate prime).

altri modi di scrivere la stessa equazione: $u_t + u_x = g$
($u_t = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, oppure $u_{/t} + u_{/x} = g$, oppure $u_{,t} + u_{,x} = g$
tutte con lo stesso significato.)

Esempio:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t) \qquad (u_t - u_{xx} = g)$$

(dove ancora g è una funzione nota e u è la funzione incognita)

Esempio: $$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione differenziale ordinaria di ordine 2.

Esempio: $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x,t)$$

(g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione alle derivate parziali del primo ordine (infatti nella equazione compaiono solo derivate prime).

altri modi di scrivere la stessa equazione: $u_t + u_x = g$
($u_t = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, oppure $u_{/t} + u_{/x} = g$, oppure $u_{,t} + u_{,x} = g$
tutte con lo stesso significato.)

Esempio:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t) \qquad (u_t - u_{xx} = g)$$

(dove ancora g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione alle derivate parziali del secondo ordine (infatti nella equazione compare una derivata seconda).

La forma generale di un'equazione differenziale di ordine 2 può essere scritta come :

$$F(\mathbf{x}, u, \nabla u, D_2 u) = 0$$

in cui:

- $\mathbf{x} = (x_1, .., x_n)$ è la variabile indipendente
- u è la funzione incognita
- ∇u è il vettore delle derivate prime di u
- $D_2 u$ è la matrice delle derivate seconde di u
- $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$

Spesso si scrive più semplicemente $F(u) = 0$

Equazioni differenziali lineari

Le equazioni differenziali lineari possono essere scritte nella forma

$$F(u) = g$$

dove g è una funzione nota, e F verifica

$$F(\alpha u + \beta w) = \alpha F(u) + \beta F(w)$$

per ogni coppia di funzioni u e w e per ogni coppia di numeri reali α e β.
Se $g = 0$ l'equazione è detta essere *omogenea*.

Equazioni differenziali lineari

Le equazioni differenziali lineari possono essere scritte nella forma

$$F(u) = g$$

dove g è una funzione nota, e F verifica

$$F(\alpha u + \beta w) = \alpha F(u) + \beta F(w)$$

per ogni coppia di funzioni u e w e per ogni coppia di numeri reali α e β. Se $g = 0$ l'equazione è detta essere *omogenea*.

Esempio: $$u_t + u_x = 0,$$
è una equazione alle derivate parziali del primo ordine lineare ed omogenea.

Equazioni differenziali lineari

Le equazioni differenziali lineari possono essere scritte nella forma

$$F(u) = g$$

dove g è una funzione nota, e F verifica

$$F(\alpha u + \beta w) = \alpha F(u) + \beta F(w)$$

per ogni coppia di funzioni u e w e per ogni coppia di numeri reali α e β. Se $g = 0$ l'equazione è detta essere *omogenea*.

Esempio: $$u_t + u_x = 0,$$
è una equazione alle derivate parziali del primo ordine lineare ed omogenea.

Esempio: $$a\,u_t + b\,u_x = g,$$
è una equazione alle derivate parziali del primo ordine lineare *non omogenea*: a coefficienti costanti se a e b sono costanti (altrimenti, a coefficienti variabili).

Esercizio: verificare che l'equazione $u_t + u_x = 0$ è lineare.

In questo caso si ha $F(u) := u_t + u_x$, e in generale, per una generica funzione v si ha $F(v) := v_t + v_x$

Se $v = \alpha u + \beta w$ si ha

$$F(v) = v_t + v_x = (\alpha u + \beta w)_t + (\alpha u + \beta w)_x$$

Esercizio: verificare che l'equazione $u_t + u_x = 0$ è lineare.

In questo caso si ha $F(u) := u_t + u_x$, e in generale, per una generica funzione v si ha $F(v) := v_t + v_x$

Se $v = \alpha u + \beta w$ si ha

$$\begin{aligned} F(v) &= v_t + v_x = (\alpha u + \beta w)_t + (\alpha u + \beta w)_x \\ &= \alpha u_t + \beta w_t + \alpha u_x + \beta w_x \end{aligned}$$

Esercizio: verificare che l'equazione $u_t + u_x = 0$ è lineare.

In questo caso si ha $F(u) := u_t + u_x$, e in generale, per una generica funzione v si ha $F(v) := v_t + v_x$

Se $v = \alpha u + \beta w$ si ha

$$\begin{aligned} F(v) &= v_t + v_x = (\alpha u + \beta w)_t + (\alpha u + \beta w)_x \\ &= \alpha u_t + \beta w_t + \alpha u_x + \beta w_x \\ &= \alpha(u_t + u_x) + \beta(w_t + w_x) = \alpha F(u) + \beta F(w) \end{aligned}$$

Esercizio: verificare che l'equazione $u_t + u_x = 0$ è lineare.

In questo caso si ha $F(u) := u_t + u_x$, e in generale, per una generica funzione v si ha $F(v) := v_t + v_x$

Se $v = \alpha u + \beta w$ si ha

$$\begin{aligned} F(v) &= v_t + v_x = (\alpha u + \beta w)_t + (\alpha u + \beta w)_x \\ &= \alpha u_t + \beta w_t + \alpha u_x + \beta w_x \\ &= \alpha(u_t + u_x) + \beta(w_t + w_x) = \alpha F(u) + \beta F(w) \end{aligned}$$

come volevamo verificare: $F(\alpha u + \beta w) = \alpha F(u) + \beta F(w)$

Problema ben posto

Il problema si dice *ben posto* se:

1. ammette una soluzione
2. la soluzione è unica
3. vale la dipendenza continua dai dati (detta anche **Stabilità** del problema), cioè

$$\textbf{se } dist(f,g) \to 0 \textbf{ allora } dist(u^f, u^g) \to 0$$

Problema ben posto

Il problema si dice *ben posto* se:

1. ammette una soluzione
2. la soluzione è unica
3. vale la dipendenza continua dai dati (detta anche **Stabilità** del problema), cioè

$$\textbf{se } dist(f, g) \to 0 \textbf{ allora } dist(u^f, u^g) \to 0$$

L'ultima condizione significa che se f e g sono i dati del problema (proprietà del materiale, carico applicato, ecc) e sono "vicini", allora le due soluzioni u^f, u^g (cioè la soluzione unica del problema con dato f e con dato g) sono "vicine".

Cosa vuol dire “vicini”? bisogna introdurre una misura della distanza tra due oggetti (detta **norma** della differenza)

Cosa vuol dire “vicini”? bisogna introdurre una misura della distanza tra due oggetti (detta **norma** della differenza)

- se i dati sono due vettori: $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ e $\underline{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$

$$dist(\underline{f}, \underline{g}) := max_{1 \leq i \leq n} \mid f_i - g_i \mid = \parallel \underline{f} - \underline{g} \parallel_\infty \qquad \textit{norma del massimo}$$

$$dist(\underline{f}, \underline{g}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i - g_i)^2} \qquad \textit{norma euclidea}$$

Cosa vuol dire "vicini"? bisogna introdurre una misura della distanza tra due oggetti (detta **norma** della differenza)

- se i dati sono due vettori: $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ e $\underline{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$

$$dist(\underline{f}, \underline{g}) := max_{1 \le i \le n} \mid f_i - g_i \mid = \| \underline{f} - \underline{g} \|_\infty \qquad \textit{norma del massimo}$$

$$dist(\underline{f}, \underline{g}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i - g_i)^2} \qquad \textit{norma euclidea}$$

- se i dati sono due funzioni: $f(x), g(x) : I \to \mathbb{R}$

$$dist(f, g) := max_{x \in I} \mid f(x) - g(x) \mid$$

$$dist(f, g) := \sqrt{\int_I (f(x) - g(x))^2}$$

Scelta una misura della distanza, cioè una norma, l'affermazione

se i dati del problema f e g sono "vicini", allora le due soluzioni u^f, u^g (cioè la soluzione unica del problema con dato f e con dato g) sono "vicine"

si puo' riformulare come

esiste una costante $C > 0$ tale che: se

$$dist(f, g) \leq \varepsilon \text{ allora } dist(u^f, u^g) \leq C\varepsilon$$

Scelta una misura della distanza, cioè una norma, l'affermazione

se i dati del problema f e g sono "vicini", allora le due soluzioni u^f, u^g (cioè la soluzione unica del problema con dato f e con dato g) sono "vicine"

si puo' riformulare come

esiste una costante $C > 0$ tale che: se

$$dist(f,g) \leq \varepsilon \text{ allora } dist(u^f, u^g) \leq C\varepsilon$$

In altre parole: un problema è stabile se a piccole perturbazioni (errori) sui dati corrispondono piccole perturbazioni (errori) sui risultati.

Esempio di problema ben posto: esistenza soluzione

Consideriamo il problema seguente, con a, b, f, α, β dati e $a < b$.

$$(P) \qquad -u''(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b] \quad u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta$$

Dobbiamo verificare le condizioni 1-2-3.

Esempio di problema ben posto: esistenza soluzione

Consideriamo il problema seguente, con a, b, f, α, β dati e $a < b$.

$$(P) \qquad -u''(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a, b] \quad u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta$$

Dobbiamo verificare le condizioni 1-2-3.

• Esistenza di una soluzione: dipende dalla regolarità del dato f.

Esempio: se f è una funzione continua, l'equazione $-u''(x) = f(x)$ assicura che la derivata seconda di u è continua nell'intervallo $[a, b]$. Quindi la soluzione esiste nello spazio delle funzioni C^2 (cioè continua con la derivata prima e la derivata seconda).

Esempio di problema ben posto: esistenza soluzione

Consideriamo il problema seguente, con a, b, f, α, β dati e $a < b$.

$$(P) \qquad -u''(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta$$

Dobbiamo verificare le condizioni 1-2-3.

• Esistenza di una soluzione: dipende dalla regolarità del dato f.

Esempio: se f è una funzione continua, l'equazione $-u''(x) = f(x)$ assicura che la derivata seconda di u è continua nell'intervallo $[a, b]$. Quindi la soluzione esiste nello spazio delle funzioni C^2 (cioè continua con la derivata prima e la derivata seconda).

Altro esempio: se f è uno scalino, l'equazione $-u''(x) = f(x)$ garantisce che la derivata prima di u è continua, ma non la derivata seconda. Quindi la soluzione esiste nello spazio delle funzioni C^1 (cioè continua con la derivata prima), ma non in C^2.

• Unicità della soluzione. Il problema è lineare quindi l'unicità può essere dimostrata per contraddizione:

Esempio di problema ben posto: unicità soluzione

• Unicità della soluzione. Il problema è lineare quindi l'unicità può essere dimostrata per contraddizione: supponiamo che (P) abbia due soluzioni diverse $u_1 \neq u_2$; ciò significa che:

$$\begin{cases} -u_1''(x) = f(x) \quad \text{in } [a,b] \\ u_1(a) = \alpha \\ u_1(b) = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} -u_2''(x) = f(x) \text{ in } [a,b] \\ u_2(a) = \alpha \\ u_2(b) = \beta \end{cases}$$

Esempio di problema ben posto: unicità soluzione

• Unicità della soluzione. Il problema è lineare quindi l'unicità può essere dimostrata per contraddizione: supponiamo che (P) abbia due soluzioni diverse $u_1 \neq u_2$; ciò significa che:

$$\begin{cases} -u_1''(x) = f(x) \ \text{ in } [a,b] \\ u_1(a) = \alpha \\ u_1(b) = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} -u_2''(x) = f(x) \text{ in } [a,b] \\ u_2(a) = \alpha \\ u_2(b) = \beta \end{cases}$$

Facendo la differenza membro a membro tra le equazioni, e ponendo $w := u_1 - u_2$: si ha che la funzione $w(x)$ risolve il problema:

$$\begin{cases} w''(x) = u_1''(x) - u_2''(x) = -f(x) + f(x) = 0 \text{ in } [a,b] \\ w(a) = u_1(a) - u_2(a) = \alpha - \alpha = 0 \\ w(b) = u_1(b) - u_2(b) = \beta - \beta = 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato:

$$\boxed{w''(x) = 0 \text{ in } [a, b], \quad w(a) = 0, \quad w(b) = 0}$$

Come sarà w?

Abbiamo trovato:

$$\boxed{w''(x) = 0 \text{ in } [a, b], \quad w(a) = 0, \quad w(b) = 0}$$

Come sarà w?

$w''(x) = 0 \ \forall x \in [a, b] \ \longrightarrow \ w =$ polinomio di primo grado, cioè una retta

$$w(x) = C_1 x + C_2$$

Abbiamo trovato:

$$\boxed{w''(x) = 0 \text{ in } [a, b], \quad w(a) = 0, \quad w(b) = 0}$$

Come sarà w?

$w''(x) = 0 \; \forall x \in [a, b] \;\longrightarrow\; w =$ polinomio di primo grado, cioè una retta

$$w(x) = C_1 x + C_2$$

Imponendo le condizioni agli estremi, si vede che la retta deve annullarsi in due punti distinti: $x = a$ e $x = b$. Quindi necessariamente $w = 0, \;\longrightarrow\; u_1 = u_2$.

Esempio di problema ben posto: stabilità-1

- Stabilità o Dipendenza continua dai dati:

Esempio di problema ben posto: stabilità-1

• Stabilità o Dipendenza continua dai dati: immaginiamo di perturbare il dato f in $g = f + \varepsilon$ (per semplicità supporremo la perturbazione $\varepsilon =$ costante positiva, ma il risultato vale ovviamente più in generale). Si ha l'errore sui dati: $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Esempio di problema ben posto: stabilità-1

• Stabilità o Dipendenza continua dai dati: immaginiamo di perturbare il dato f in $g = f + \varepsilon$ (per semplicità supporremo la perturbazione $\varepsilon =$ costante positiva, ma il risultato vale ovviamente più in generale). Si ha l'errore sui dati: $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Risolviamo ora il problema *perturbato*:

$$(P_\varepsilon) \qquad -w''(x) = g(x) = f(x) + \varepsilon, \quad w(a) = \alpha \quad w(b) = \beta$$

invece del problema di partenza

$$(P) \qquad -u''(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a, b] \quad u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta$$

Esempio di problema ben posto: stabilità-1

• Stabilità o Dipendenza continua dai dati: immaginiamo di perturbare il dato f in $g = f + \varepsilon$ (per semplicità supporremo la perturbazione $\varepsilon =$ costante positiva, ma il risultato vale ovviamente più in generale). Si ha l'errore sui dati: $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.
Risolviamo ora il problema *perturbato*:

$$(P_\varepsilon) \qquad -w''(x) = g(x) = f(x) + \varepsilon, \quad w(a) = \alpha \quad w(b) = \beta$$

invece del problema di partenza

$$(P) \qquad -u''(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta$$

Si vuole valutare l'errore tra u e w. Facendo la differenza $(P) - (P_\varepsilon)$ si vede che la funzione differenza $v(x) = u(x) - w(x)$ risolve

$$\begin{cases} -u''(x) - (-w''(x)) = f - (f + \varepsilon) \Rightarrow u''(x) - w''(x) = \varepsilon \Rightarrow v''(x) = \varepsilon \\ u(a) - w(a) = 0 \Rightarrow v(a) = 0 \\ u(b) - w(b) = 0 \Rightarrow v(b) = 0 \end{cases}$$

Stabilità-2

Riassumendo: la funzione $v(x) = u(x) - w(x)$ è soluzione di

$$\boxed{v''(x) = \varepsilon \quad \forall\, x \in [a, b] \quad v(a) = 0 \quad v(b) = 0}$$

Stabilità-2

Riassumendo: la funzione $v(x) = u(x) - w(x)$ è soluzione di

$$\boxed{v''(x) = \varepsilon \quad \forall\, x \in [a, b] \quad v(a) = 0 \quad v(b) = 0}$$

La derivata seconda si v è una costante ($v''(x) = \varepsilon$). Quindi v sarà un polinomio di secondo grado: $v(x) = \frac{\varepsilon}{2}x^2 + C_1 x + C_2$.

Stabilità-2

Riassumendo: la funzione $v(x) = u(x) - w(x)$ è soluzione di

$$\boxed{v''(x) = \varepsilon \quad \forall\, x \in [a, b] \quad v(a) = 0 \quad v(b) = 0}$$

La derivata seconda si v è una costante ($v''(x) = \varepsilon$). Quindi v sarà un polinomio di secondo grado: $v(x) = \frac{\varepsilon}{2}x^2 + C_1 x + C_2$.
Imponendo le condizioni ai limiti si ha

$$\begin{cases} v(a) = 0 \longrightarrow \frac{\varepsilon}{2}a^2 + C_1 a + C_2 = 0 \\ v(b) = 0 \longrightarrow \frac{\varepsilon}{2}b^2 + C_1 b + C_2 = 0 \end{cases}$$

Stabilità-2

Riassumendo: la funzione $v(x) = u(x) - w(x)$ è soluzione di

$$\boxed{v''(x) = \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad v(a) = 0 \quad v(b) = 0}$$

La derivata seconda si v è una costante $(v''(x) = \varepsilon)$. Quindi v sarà un polinomio di secondo grado: $v(x) = \frac{\varepsilon}{2}x^2 + C_1 x + C_2$.
Imponendo le condizioni ai limiti si ha

$$\begin{cases} v(a) = 0 \longrightarrow \frac{\varepsilon}{2}a^2 + C_1 a + C_2 = 0 \\ v(b) = 0 \longrightarrow \frac{\varepsilon}{2}b^2 + C_1 b + C_2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema (compito a casa!) si trova

$$v(x) = \frac{\varepsilon}{2}(x^2 - (a + b)x + ab)$$

Stabilità-3

$$\boxed{v(x) = \frac{\varepsilon}{2}(x^2 - (a+b)x + ab)}$$

Stabilità-3

$$\boxed{v(x) = \frac{\varepsilon}{2}(x^2 - (a+b)x + ab)}$$

Si tratta di una parabola convessa che si annulla in a e in b. Quindi ha minimo (negativo) nel punto di mezzo dell'intervallo (a, b), cioè per $x = (a+b)/2$.

Stabilità-3

$$\boxed{v(x) = \frac{\varepsilon}{2}(x^2 - (a+b)x + ab)}$$

Si tratta di una parabola convessa che si annulla in a e in b. Quindi ha minimo (negativo) nel punto di mezzo dell'intervallo (a, b), cioè per $x = (a+b)/2$. Nel punto di mezzo dell'intervallo il valore assoluto di v ha dunque un massimo, che vale

$$|v((a+b)/2)| = \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{2} + ab\right| = \frac{(a-b)^2}{8}\varepsilon$$

cioè una quantità fissa $C(a, b) = \frac{(a-b)^2}{8}$ volte ε.

Stabilità-3

$$\boxed{v(x) = \frac{\varepsilon}{2}(x^2 - (a+b)x + ab)}$$

Si tratta di una parabola convessa che si annulla in a e in b. Quindi ha minimo (negativo) nel punto di mezzo dell'intervallo (a, b), cioè per $x = (a+b)/2$. Nel punto di mezzo dell'intervallo il valore assoluto di v ha dunque un massimo, che vale

$$|v((a+b)/2)| = \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{2} + ab\right| = \frac{(a-b)^2}{8}\varepsilon$$

cioè una quantità fissa $C(a, b) = \frac{(a-b)^2}{8}$ volte ε. Abbiamo ottenuto che

$$\text{se } \|f-g\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{allora} \quad \|u-w\|_\infty \leq C\varepsilon$$

cioè il problema è stabile.

Equazione di trasporto

È un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Il modello più semplice è:
Si cerca $u = u(x,t)$ soluzione di

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

t è il tempo, x lo spazio;
$f(x,t)$ è un dato del problema, funzione dello spazio e del tempo.

Equazione di trasporto

È un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Il modello più semplice è:
Si cerca $u = u(x,t)$ soluzione di

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

t è il tempo, x lo spazio;
$f(x,t)$ è un dato del problema, funzione dello spazio e del tempo.
Più compattamente:

$$u_t + cu_x = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Equazione di trasporto

È un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Il modello più semplice è:
Si cerca $u = u(x,t)$ soluzione di

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

t è il tempo, x lo spazio;
$f(x,t)$ è un dato del problema, funzione dello spazio e del tempo.
Più compattamente:

$$u_t + cu_x = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

c è una costante che ha le dimensioni di una velocità.

Equazione di trasporto

È un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Il modello più semplice è:
Si cerca $u = u(x,t)$ soluzione di

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

t è il tempo, x lo spazio;
$f(x,t)$ è un dato del problema, funzione dello spazio e del tempo.
Più compattamente:

$$u_t + cu_x = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

c è una costante che ha le dimensioni di una velocità. Infatti, svolgendo l'analisi dimensionale si vede che:

$$u_t : [u] \cdot [t^{-1}],\ u_x : [u] \cdot [\ell^{-1}], \longrightarrow\ c : [\ell\ \cdot\ t^{-1}]$$

Equazione di trasporto

È un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Il modello più semplice è:
Si cerca $u = u(x,t)$ soluzione di

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

t è il tempo, x lo spazio;
$f(x,t)$ è un dato del problema, funzione dello spazio e del tempo.
Più compattamente:

$$u_t + cu_x = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

c è una costante che ha le dimensioni di una velocità. Infatti, svolgendo l'analisi dimensionale si vede che:

$$u_t : [u] \cdot [t^{-1}],\ u_x : [u] \cdot [\ell^{-1}], \longrightarrow\ c : [\ell \ \cdot \ t^{-1}]$$

Per l'unicità serve una condizione iniziale (per $t = 0$): $u(x,0) = u_0(x)$

Il problema omogeneo $(f(x,t)=0)$

Cerchiamo di risolvere il problema di Cauchy omogeneo:

$$\begin{cases} (i)\ u_t + c u_x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ t>0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Il problema omogeneo $(f(x,t) = 0)$

Cerchiamo di risolvere il problema di Cauchy omogeneo:

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Metodo delle caratteristiche

Nel piano (x,t) cerchiamo linee $x = x(t)$ lungo le quali u è costante. Data $x(t)$, posto $v(t) = u(x(t),t)$ (funzione **solo** di t), v costante significa $v(t) = v(0) = u(x(0),0)$

Il problema omogeneo ($f(x,t) = 0$)

Cerchiamo di risolvere il problema di Cauchy omogeneo:

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Metodo delle caratteristiche

Nel piano (x,t) cerchiamo linee $x = x(t)$ lungo le quali u è costante. Data $x(t)$, posto $v(t) = u(x(t),t)$ (funzione **solo** di t), v costante significa $v(t) = v(0) = u(x(0),0)$

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_t.$$

Il problema omogeneo ($f(x,t) = 0$)

Cerchiamo di risolvere il problema di Cauchy omogeneo:

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Metodo delle caratteristiche

Nel piano (x,t) cerchiamo linee $x = x(t)$ lungo le quali u è costante. Data $x(t)$, posto $v(t) = u(x(t),t)$ (funzione **solo** di t), v costante significa $v(t) = v(0) = u(x(0),0)$

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_t.$$

Confronto con (i): se $\dfrac{dx}{dt} = c \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = c\,u_x + u_t = 0$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\,u_x + u_t = 0}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \to x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\,u_x + u_t = 0}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \to x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\,u_x + u_t = 0}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \rightarrow x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct)$$

(x^*, t^*) punto qualunque del piano (x, t);

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\, u_x + u_t = 0}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \to x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct)$$

(x^*, t^*) punto qualunque del piano (x, t);
retta (caratteristica) che passa per il punto: $x - x^* = c(t - t^*)$;

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\, u_x + u_t = 0}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \to x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct)$$

(x^*, t^*) punto qualunque del piano (x, t);
retta (caratteristica) che passa per il punto: $x - x^* = c(t - t^*)$;
intersezione con asse x: $x_0 = x^* - ct^*$.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\,u_x + u_t = 0}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \rightarrow x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct)$$

(x^*, t^*) punto qualunque del piano (x, t);
retta (caratteristica) che passa per il punto: $x - x^* = c(t - t^*)$;
intersezione con asse x: $x_0 = x^* - ct^*$.
Nel punto (x^*, t^*) il valore di u sarà uguale al suo valore in x_0 cioè uguale a $u_0(x^* - ct^*)$.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\,u_x + u_t = 0}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \to x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct)$$

(x^*, t^*) punto qualunque del piano (x, t);
retta (caratteristica) che passa per il punto: $x - x^* = c(t - t^*)$;
intersezione con asse x: $x_0 = x^* - ct^*$.
Nel punto (x^*, t^*) il valore di u sarà uguale al suo valore in x_0 cioè uguale a $u_0(x^* - ct^*)$. Visto che questo si verifica per **ogni** punto (x^*, t^*), possiamo concludere che la soluzione del problema di Cauchy omogeneo è

$$\boxed{u(x, t) = u_0(x - ct)}$$

(verifica alla lavagna che $u(x, t) = u_0(x - ct)$ risolve (1))

Equazione di trasporto omogenea ($f = 0$)

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct)}$$

Riassumendo: il valore della soluzione in un generico punto (x,t) è pari al valore del dato iniziale u_0 nel punto x_0 di intersezione tra l'asse delle x (cioè $t = 0$) e la retta con pendenza $1/c$ passante per (x,t), cioè la retta $x = ct + x_0$ (che nel piano (x,t) si scrive più comunemente come $t = (1/c)(x - x_0)$).

Equazione di trasporto omogenea ($f = 0$)

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct)}$$

Riassumendo: il valore della soluzione in un generico punto (x,t) è pari al valore del dato iniziale u_0 nel punto x_0 di intersezione tra l'asse delle x (cioè $t = 0$) e la retta con pendenza $1/c$ passante per (x,t), cioè la retta $x = ct + x_0$ (che nel piano (x,t) si scrive più comunemente come $t = (1/c)(x - x_0)$).

Questo **metodo** è detto **metodo delle caratteristiche**.

L'analisi appena fatta ci dice che l'onda iniziale viene trasportata lungo le linee caratteristiche e spostata con pendenza $1/c$. Conseguentemente, più alta è la velocità c, più velocemente l'onda iniziale si propaga (come intuitivamente ci si aspetta).

Esempi

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct)}$$

Andamento della soluzione in corrispondenza allo stesso dato iniziale $u_0(x)$ e per diversi valori della velocità.

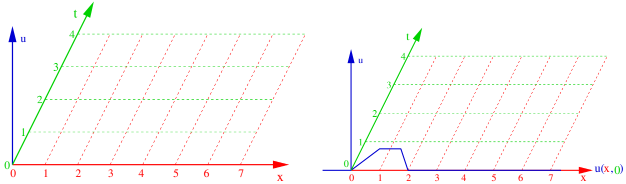
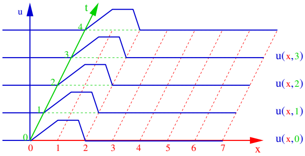


Figura: A sinistra: rette parallele agli assi nel piano (x, t). A destra il dato iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$



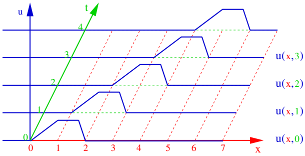


Figura: A sinistra: velocità $c = 0$ $(u_t = 0) \Rightarrow u(x, t) \equiv u_0(x) \forall t$. A destra la soluzione $u(x, t)$ corrispondente a $c = 1$ $(u_t + u_x = 0)$

Esempi

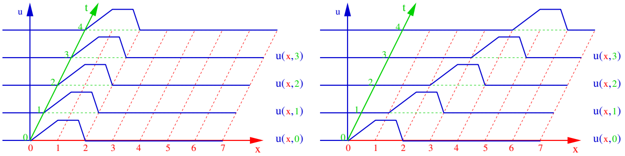


Figura: A sinistra: velocità $c = 0$ $(u_t = 0) \Rightarrow u(x,t) \equiv u_0(x) \forall t$. A destra la soluzione $u(x,t)$ corrispondente a $c = 1$ $(u_t + u_x = 0)$

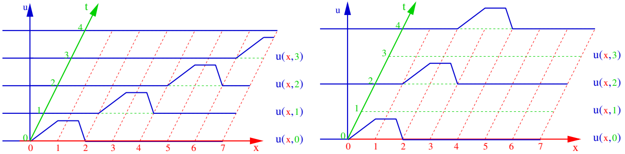


Figura: Andamento della soluzione $u(x,t)$ in corrispondenza della velocità: $c = 2$ (a sinistra), $c = 1/2$ (a destra).

Caso di una forzante costante: $f(x,t) = k$

Per esempio, $k = 1$. Si vuole risolvere il problema

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

Per esempio, $k = 1$. Si vuole risolvere il problema

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

Cerchiamo di esprimere x in funzione di $t : x = x(t)$.
Posto $v(t) = u(x(t),t)$ (funzione **solo** di t), calcoliamo $v'(t)$:

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_t.$$

Caso di una forzante costante: $f(x,t) = k$

Per esempio, $k = 1$. Si vuole risolvere il problema

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

Cerchiamo di esprimere x in funzione di $t : x = x(t)$.
Posto $v(t) = u(x(t), t)$ (funzione **solo** di t), calcoliamo $v'(t)$:

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_t.$$

Confronto con (i): se $\dfrac{dx}{dt} = c \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = c\, u_x + u_t = 1$, cioè lungo le linee caratteristiche, individuate da $\dfrac{dx}{dt} = c$ la derivata di v è uguale a 1

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\, u_x + u_t = 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \to x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\, u_x + u_t = 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \to x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$\frac{dv}{dt} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t 1 ds \Rightarrow v(t) - v(0) = t$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\,u_x + u_t = 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \to x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$\frac{dv}{dt} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t 1 ds \Rightarrow v(t) - v(0) = t$$

$$v(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct) \Rightarrow$$
$$v(t)(= u(x(t), t)) = u_0(x - ct) + t$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\, u_x + u_t = 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \to x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$\frac{dv}{dt} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t 1 ds \Rightarrow v(t) - v(0) = t$$

$$v(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct) \Rightarrow$$
$$v(t)(= u(x(t), t)) = u_0(x - ct) + t$$

Quindi, in ogni punto (x, t) la soluzione del problema di Cauchy con forzante 1 è data da

$$\boxed{u(x, t) = u_0(x - ct) + t}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c\, u_x + u_t = 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = c \rightarrow x = (x(t)) = ct + x_0, x_0 = \text{ intersezione retta con asse } x$$

$$\frac{dv}{dt} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t 1 ds \Rightarrow v(t) - v(0) = t$$

$$v(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x - ct) \Rightarrow$$
$$v(t)(= u(x(t), t)) = u_0(x - ct) + t$$

Quindi, in ogni punto (x, t) la soluzione del problema di Cauchy con forzante 1 è data da

$$\boxed{u(x, t) = u_0(x - ct) + t}$$

(Più in generale, con forzante k si ha: $u(x, t) = u_0(x - ct) + kt$)

Metodo alternativo

Cerchiamo la soluzione come somma di due funzioni:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$$

Metodo alternativo

Cerchiamo la soluzione come somma di due funzioni:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$$

$\tilde{u}(x,t)$ è la soluzione del problema omogeneo, cioè:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + c\tilde{u}_x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = u_0(x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \tilde{u}(x,t) = u_0(x-ct) \quad \forall x, t$$

Metodo alternativo

Cerchiamo la soluzione come somma di due funzioni:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$$

$\tilde{u}(x,t)$ è la soluzione del problema omogeneo, cioè:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + c\tilde{u}_x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = u_0(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \tilde{u}(x,t) = u_0(x - ct) \quad \forall x, t$$

la funzione w dovrà quindi verificare

$$\begin{cases} (i)\ w_t + cw_x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ (ii)\ w(x,0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Cerchiamo la soluzione come somma di due funzioni:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$$

$\tilde{u}(x,t)$ è la soluzione del problema omogeneo, cioè:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + c\tilde{u}_x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \tilde{u}(x,t) = u_0(x-ct) \quad \forall x, t$$

la funzione w dovrà quindi verificare

$$\begin{cases} (i)\ w_t + cw_x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ w(x,0) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verifichiamo innanzitutto che la funzione $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$ risolve (2).

$$u(x,0) = u_0(x)? \quad \text{si perché } u(x,0) = \tilde{u}(x,0) + w(x,0) = u_0(x) + 0$$

Metodo alternativo

Cerchiamo la soluzione come somma di due funzioni:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$$

$\tilde{u}(x,t)$ è la soluzione del problema omogeneo, cioè:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + c\tilde{u}_x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \tilde{u}(x,t) = u_0(x - ct) \quad \forall x, t$$

la funzione w dovrà quindi verificare

$$\begin{cases} (i)\ w_t + cw_x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ w(x,0) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verifichiamo innanzitutto che la funzione $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$ risolve (2).

$$u(x,0) = u_0(x)? \quad \text{si perché } u(x,0) = \tilde{u}(x,0) + w(x,0) = u_0(x) + 0$$

$$u_t + cu_x = 1? \quad \text{si perché } u_t + cu_x = \tilde{u}_t + c\tilde{u}_x + w_t + cw_x = 0 + 1$$

Per trovare w usiamo il metodo delle caratteristiche come precedentemente. Posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Quindi

$$\boxed{\text{Se } \frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = 1}$$

Per trovare w usiamo il metodo delle caratteristiche come precedentemente. Posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Quindi

$$\boxed{\text{Se } \frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = 1}$$

Ciò significa che sulle linee caratteristiche $x = x(t) = ct + x_0$ la $\dfrac{dv}{dt}$ deve essere uguale a 1; integrando si ottiene:

$$\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t 1 ds \Rightarrow v(t) - v(0) = t$$

La condizione iniziale -*(ii)* implica che $v(0) = w(x(0), 0) = 0$.

Per trovare w usiamo il metodo delle caratteristiche come precedentemente. Posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Quindi

$$\boxed{\text{Se } \frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = 1}$$

Ciò significa che sulle linee caratteristiche $x = x(t) = ct + x_0$ la $\frac{dv}{dt}$ deve essere uguale a 1; integrando si ottiene:

$$\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t 1 ds \Rightarrow v(t) - v(0) = t$$

La condizione iniziale -*(ii)* implica che $v(0) = w(x(0), 0) = 0$. Dunque:

$$\boxed{u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t) = u_0(x - ct) + t}$$

Per trovare w usiamo il metodo delle caratteristiche come precedentemente. Posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Quindi

$$\boxed{\text{Se } \frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = 1}$$

Ciò significa che sulle linee caratteristiche $x = x(t) = ct + x_0$ la $\dfrac{dv}{dt}$ deve essere uguale a 1; integrando si ottiene:

$$\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t 1 ds \Rightarrow v(t) - v(0) = t$$

La condizione iniziale -*(ii)* implica che $v(0) = w(x(0), 0) = 0$. Dunque:

$$\boxed{u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t) = u_0(x - ct) + t}$$

(Più in generale, con forzante k si ha: $u(x,t) = u_0(x - ct) + kt$)

Caso di una forzante dipendente solo da t

Si vuole risolvere il problema

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = f(t) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

Caso di una forzante dipendente solo da t

Si vuole risolvere il problema

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = f(t) & \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

Procedendo come prima, cerchiamo la soluzione come

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$$

con $\tilde{u}(x,t)$ soluzione del problema omogeneo, cioè:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + c\tilde{u}_x = 0 & \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = u_0(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \tilde{u}(x,t) = u_0(x - ct) \quad \forall x, t$$

e w soluzione di

$$\begin{cases} (i)\ w_t + cw_x = f(t) & \forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ (ii)\ w(x,0) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Usando sempre il metodo delle caratteristiche, posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Usando sempre il metodo delle caratteristiche, posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Sulle linee $\frac{dx}{dt} = c$ si ha $\frac{dv}{dt} = f(t)$, cioè, sulle linee caratteristiche la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(t)$.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = f(t)}$$

Usando sempre il metodo delle caratteristiche, posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Sulle linee $\frac{dx}{dt} = c$ si ha $\frac{dv}{dt} = f(t)$, cioè, sulle linee caratteristiche la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(t)$.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = f(t)}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c \rightarrow x = x(t) = ct + x_0 \\ \frac{dv}{dt} = f(t) \rightarrow \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(s) ds \Rightarrow v(t) - v(0) = \int_0^t f(s) ds \end{cases}$$

Usando sempre il metodo delle caratteristiche, posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Sulle linee $\dfrac{dx}{dt} = c$ si ha $\dfrac{dv}{dt} = f(t)$, cioè, sulle linee caratteristiche la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(t)$.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = f(t)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c \rightarrow x = x(t) = ct + x_0 \\ \dfrac{dv}{dt} = f(t) \rightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(s) ds \Rightarrow v(t) - v(0) = \int_0^t f(s) ds \end{cases}$$

Per definizione: $v(0) = w(x(0), 0) = w(x_0, 0) = 0$, quindi la soluzione del problema (3) sarà:

$$\boxed{u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s) ds.}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x-ct) + \int_0^t f(s)ds.}$$

Verifichiamo se questa è la soluzione corretta di (3):

- $u_t = u_0'(x-ct)(-c) + f(t)$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x-ct) + \int_0^t f(s)ds.}$$

Verifichiamo se questa è la soluzione corretta di (3):

- $u_t = u_0'(x-ct)(-c) + f(t)$
- $cu_x = c[u_0'(x-ct) + 0]$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s)ds.}$$

Verifichiamo se questa è la soluzione corretta di (3):

- $u_t = u_0'(x - ct)(-c) + f(t)$
- $cu_x = c[u_0'(x - ct) + 0]$
- $u_t + cu_x = u_0'(x - ct)(-c) + f(t) + c[u_0'(x - ct) + 0] = f(t)$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x-ct) + \int_0^t f(s)ds.}$$

Verifichiamo se questa è la soluzione corretta di (3):

- $u_t = u_0'(x-ct)(-c) + f(t)$
- $cu_x = c[u_0'(x-ct) + 0]$
- $u_t + cu_x = u_0'(x-ct)(-c) + f(t) + c[u_0'(x-ct) + 0] = f(t)$
- $u(x,0) = u_0(x) + \int_0^0 f(s)ds = u_0(x) + 0 = u_0(x)$

La verifica è soddisfatta.

Caso di una forzante dipendente solo da x

Si vuole risolvere il problema

$$\begin{cases} (i)\ u_t + c u_x = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4}$$

Caso di una forzante dipendente solo da x

Si vuole risolvere il problema

$$\begin{cases} (i)\ u_t + cu_x = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ u(x,0) = u_0(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4}$$

Procedendo come prima, cerchiamo la soluzione come

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x,t)$$

con $\tilde{u}(x,t)$ soluzione del problema omogeneo, cioè:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + c\tilde{u}_x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = u_0(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \tilde{u}(x,t) = u_0(x - ct) \quad \forall x, t$$

e w soluzione di

$$\begin{cases} (i)\ w_t + cw_x = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ (ii)\ w(x,0) = 0\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Usando sempre il metodo delle caratteristiche, posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Usando sempre il metodo delle caratteristiche, posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Sulle linee $\dfrac{dx}{dt} = c$ si ha $\dfrac{dv}{dt} = f(x)$, cioè, sulle linee caratteristiche la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(x)$:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = f(x)}$$

Usando sempre il metodo delle caratteristiche, posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Sulle linee $\frac{dx}{dt} = c$ si ha $\frac{dv}{dt} = f(x)$, cioè, sulle linee caratteristiche la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(x)$:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = f(x)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c \to x = x(t) = ct + x_0 \\ \dfrac{dv}{dt} = f(x) \to \displaystyle\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(x(s)) ds \end{cases}$$

Usando sempre il metodo delle caratteristiche, posto $v(t) := w(x(t), t)$ e derivando si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Sulle linee $\frac{dx}{dt} = c$ si ha $\frac{dv}{dt} = f(x)$, cioè, sulle linee caratteristiche la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(x)$:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c, \qquad \frac{dv}{dt} = f(x)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c \to x = x(t) = ct + x_0 \\ \dfrac{dv}{dt} = f(x) \to \displaystyle\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(x(s)) ds \end{cases}$$

Quindi (poichè $v(0) = w(x(0), 0) = w(x_0, 0) = 0$)

$$v(t) = \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(x(s)) ds = \int_0^t f(cs + x_0) ds.$$

$$\boxed{v(t) = \int_0^t f(cs + x_0)ds}$$

$$\boxed{v(t) = \int_0^t f(cs + x_0)ds}$$

Risolviamo l'integrale per sostituzione: posto $z = cs + x_0$ si ha

$$ds = \frac{1}{c}dz \qquad s = 0 \to z = x_0 \qquad s = t \to z = ct + x_0$$

da cui

$$\int_0^t f(cs + x_0)ds = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{ct+x_0} f(z)dz = \frac{1}{c}\Big[F(ct + x_0) - F(x_0)\Big]$$

(dove F è una primitiva di f, cioè $F' = f$).

$$\boxed{v(t) = \int_0^t f(cs + x_0)ds}$$

Risolviamo l'integrale per sostituzione: posto $z = cs + x_0$ si ha

$$ds = \frac{1}{c}dz \qquad s = 0 \rightarrow z = x_0 \qquad s = t \rightarrow z = ct + x_0$$

da cui

$$\int_0^t f(cs + x_0)ds = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{ct+x_0} f(z)dz = \frac{1}{c}\Big[F(ct + x_0) - F(x_0)\Big]$$

(dove F è una primitiva di f, cioè $F' = f$). quindi:

$$w(x,t) = \frac{1}{c}[F(x) - F(x - ct)]$$

e la soluzione del problema (4) è:

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + \frac{1}{c}[F(x) - F(x - ct)]}$$

Considerazioni finali

Dato un qualunque punto x_0 sull'asse x, il valore del dato iniziale in x_0 viene trasportato nel tempo lungo la linea caratteristica $x = ct + x_0$.

Considerazioni finali

Dato un qualunque punto x_0 sull'asse x, il valore del dato iniziale in x_0 viene trasportato nel tempo lungo la linea caratteristica $x = ct + x_0$.
Nel caso del problema omogeneo ($f = 0$), per trovare il valore della soluzione in un generico punto $(\overline{x}, \overline{t})$, si deve:

1. scrivere l'equazione della retta caratteristica passante per quel punto (parallela alla generica retta $x = ct$). Tale retta ha equazione $x - \overline{x} = c(t - \overline{t})$.

Considerazioni finali

Dato un qualunque punto x_0 sull'asse x, il valore del dato iniziale in x_0 viene trasportato nel tempo lungo la linea caratteristica $x = ct + x_0$.
Nel caso del problema omogeneo ($f = 0$), per trovare il valore della soluzione in un generico punto $(\overline{x}, \overline{t})$, si deve:

1. scrivere l'equazione della retta caratteristica passante per quel punto (parallela alla generica retta $x = ct$). Tale retta ha equazione $x - \overline{x} = c(t - \overline{t})$.
2. trovare la sua intersezione con $t = 0$, che chiamiamo $\overline{x_0}$. Si ha $\overline{x_0} = \overline{x} - c\overline{t}$

Considerazioni finali

Dato un qualunque punto x_0 sull'asse x, il valore del dato iniziale in x_0 viene trasportato nel tempo lungo la linea caratteristica $x = ct + x_0$.
Nel caso del problema omogeneo ($f = 0$), per trovare il valore della soluzione in un generico punto $(\overline{x}, \overline{t})$, si deve:

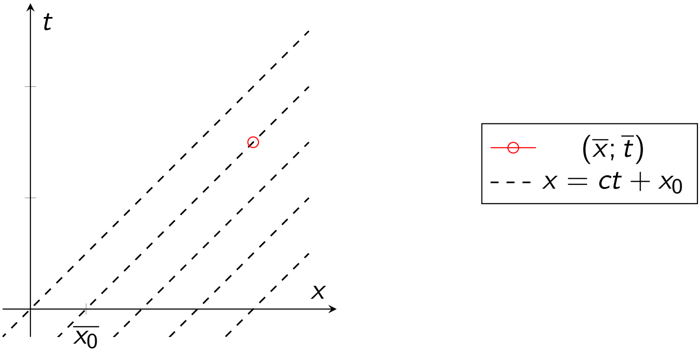
1. scrivere l'equazione della retta caratteristica passante per quel punto (parallela alla generica retta $x = ct$). Tale retta ha equazione $x - \overline{x} = c(t - \overline{t})$.
2. trovare la sua intersezione con $t = 0$, che chiamiamo $\overline{x_0}$. Si ha $\overline{x_0} = \overline{x} - c\overline{t}$
3. dopodiché si ha $u(\overline{x}, \overline{t}) = u(\overline{x_0}, 0) = u_0(\overline{x_0})$, cioè pari al dato iniziale in $\overline{x_0}$

Considerazioni finali

Dato un qualunque punto x_0 sull'asse x, il valore del dato iniziale in x_0 viene trasportato nel tempo lungo la linea caratteristica $x = ct + x_0$.
Nel caso del problema omogeneo ($f = 0$), per trovare il valore della soluzione in un generico punto $(\overline{x}, \overline{t})$, si deve:

1. scrivere l'equazione della retta caratteristica passante per quel punto (parallela alla generica retta $x = ct$). Tale retta ha equazione $x - \overline{x} = c(t - \overline{t})$.
2. trovare la sua intersezione con $t = 0$, che chiamiamo $\overline{x_0}$. Si ha $\overline{x_0} = \overline{x} - c\overline{t}$
3. dopodiché si ha $u(\overline{x}, \overline{t}) = u(\overline{x_0}, 0) = u_0(\overline{x_0})$, cioè pari al dato iniziale in $\overline{x_0}$

Se $f \neq 0$, il valore iniziale sarà comunque trasportato lungo le caratteristiche e sarà perturbato in funzione di f



t
x
$\overline{x_0}$
$(\overline{x};\overline{t})$
$x = ct + x_0$

Richiami

$$u_t + cu_x = 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct)}$$

Richiami

$$u_t + cu_x = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R},\;\; t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct)}$$

$$u_t + cu_x = k \;\; \forall x \in \mathbb{R},\;\; t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + kt}$$

Richiami

$$u_t + cu_x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct)}$$

$$u_t + cu_x = k \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + kt}$$

$$u_t + cu_x = f(t) \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s)ds}$$

Richiami

$$u_t + cu_x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct)}$$

$$u_t + cu_x = k \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + kt}$$

$$u_t + cu_x = f(t) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s)ds}$$

$$u_t + cu_x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - ct) + \frac{1}{c}[F(x) - F(x - ct)] \quad (F' = f)}$$

Problema di trasporto su un intervallo finito

Finora abbiamo lavorato su tutta la retta reale, cioè per tutti gli $x \in \mathbb{R}$: è sufficiente conoscere il valore iniziale della soluzione, per conoscerla ovunque (*problema ai valori iniziali*, ossia *problema di Cauchy*).

Problema di trasporto su un intervallo finito

Finora abbiamo lavorato su tutta la retta reale, cioè per tutti gli $x \in \mathbb{R}$: è sufficiente conoscere il valore iniziale della soluzione, per conoscerla ovunque (*problema ai valori iniziali*, ossia *problema di Cauchy*).
Ora ci occuperemo di un problema alle derivate parziali di tipo più classico, con *condizioni iniziali e ai limiti*.

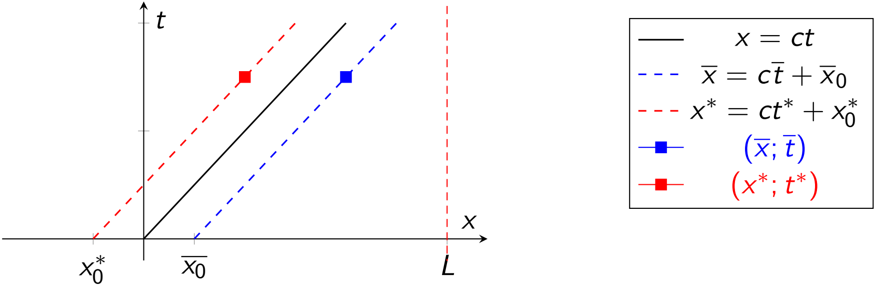
Problema di trasporto su un intervallo finito

Finora abbiamo lavorato su tutta la retta reale, cioè per tutti gli $x \in \mathbb{R}$: è sufficiente conoscere il valore iniziale della soluzione, per conoscerla ovunque (*problema ai valori iniziali*, ossia *problema di Cauchy*).
Ora ci occuperemo di un problema alle derivate parziali di tipo più classico, con *condizioni iniziali e ai limiti*.
Cominciamo a scrivere un problema di trasporto *su un intervallo finito* $(0, L)$ di $\mathbb{R}$. Il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

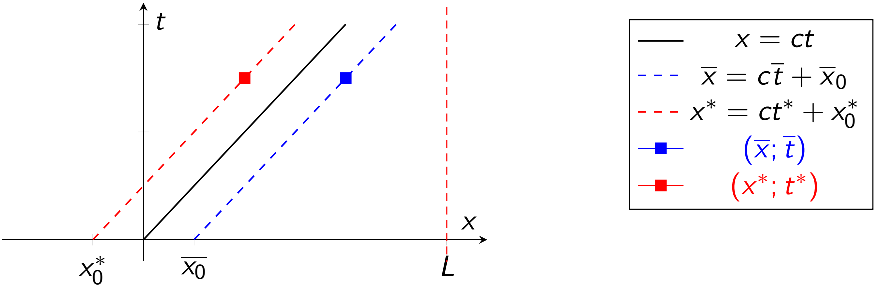
con c costante che, per fissare le idee, supponiamo positiva ($c > 0$).

Cominciamo col procedere come prima col metodo delle caratteristiche. Essendo c costante sono tutte rette parallele alla retta $x = ct$



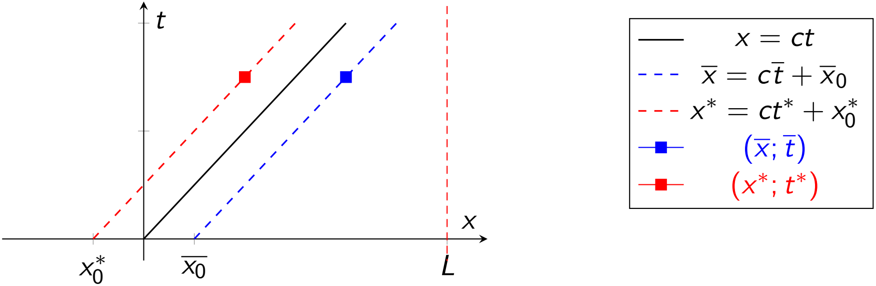
La retta caratteristica passante per $(\overline{x}, \overline{t})$ taglia l'asse x nel punto $\overline{x}_0$ che sta nell'intervallo $[0, L]$. Quindi $u(\overline{x}, \overline{t}) = u_0(\overline{x}_0) = u_0(\overline{x} - c\overline{t})$.

Cominciamo col procedere come prima col metodo delle caratteristiche. Essendo c costante sono tutte rette parallele alla retta $x = ct$

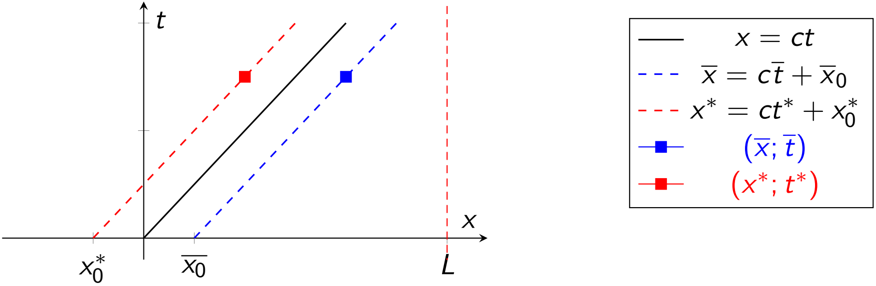


La retta caratteristica passante per $(\overline{x}, \overline{t})$ taglia l'asse x nel punto $\overline{x}_0$ che sta nell'intervallo $[0, L]$. Quindi $u(\overline{x}, \overline{t}) = u_0(\overline{x}_0) = u_0(\overline{x} - c\overline{t})$.

Invece la caratteristica passante per $(x^*; t^*)$ taglia l'asse x nel punto x_0^* che non sta nell'intervallo $[0, L]$. Il valore iniziale non esiste (infatti $u_0(x)$ è assegnata solo per $x \in [0, L]$).



Se si prende un punto (x^*, t^*) che sta sopra la caratteristica che passa per l'origine, si vede che la linea caratteristica passante per (x^*, t^*) taglia l'asse x in un punto che sta fuori dall'intervallo $[0, L]$ e quindi non si hanno informazioni da trasmettere lungo la linea caratteristica.



Se si prende un punto (x^*, t^*) che sta sopra la caratteristica che passa per l'origine, si vede che la linea caratteristica passante per (x^*, t^*) taglia l'asse x in un punto che sta fuori dall'intervallo $[0, L]$ e quindi non si hanno informazioni da trasmettere lungo la linea caratteristica.

È necessario avere un'altra condizione, questa volta ai limiti, ossia serve avere un dato assegnato dove le caratteristiche entrano (in questo caso, poiché $c > 0$, per $x = 0$).

Aggiungendo un *dato al bordo* per $x = 0$ il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = g^S(t) \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

(I dati dovranno verificare $g^S(0) = u_0(0)$).

Aggiungendo un *dato al bordo* per $x = 0$ il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \le x \le L \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \le x \le L \\ u(0,t) = g^S(t) \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

(I dati dovranno verificare $g^S(0) = u_0(0)$).

Procedimento per trovare la soluzione in un generico punto (x_1, t_1):

- si calcola la linea caratteristica passante per quel punto: $(x - x_1) = c(t - t_1)$ e si determina l'intersezione con l'asse delle x cioè per $t = 0$: $x_0 = x_1 - ct_1$

Aggiungendo un *dato al bordo* per $x = 0$ il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = g^S(t) \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

(I dati dovranno verificare $g^S(0) = u_0(0)$).

Procedimento per trovare la soluzione in un generico punto (x_1, t_1):

- si calcola la linea caratteristica passante per quel punto: $(x - x_1) = c(t - t_1)$ e si determina l'intersezione con l'asse delle x cioè per $t = 0$: $x_0 = x_1 - ct_1$
- se $x_0 \in [0, L] \rightarrow u(x_1, t_1) = u_0(x_1 - ct_1)$

Aggiungendo un *dato al bordo* per $x = 0$ il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \le x \le L \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \le x \le L \\ u(0,t) = g^S(t) \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

(I dati dovranno verificare $g^S(0) = u_0(0)$).

Procedimento per trovare la soluzione in un generico punto (x_1, t_1):

- si calcola la linea caratteristica passante per quel punto: $(x - x_1) = c(t - t_1)$ e si determina l'intersezione con l'asse delle x cioè per $t = 0$: $x_0 = x_1 - ct_1$
- se $x_0 \in [0, L] \rightarrow u(x_1, t_1) = u_0(x_1 - ct_1)$
- se $x_0 \notin [0, L]$ si calcola l'intersezione con l'asse $t \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - x_1 = c(t - t_1) \end{cases} \Rightarrow t_0 = -\frac{x_1}{c} + t_1$$

Aggiungendo un *dato al bordo* per $x = 0$ il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & 0 \le x \le L \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = g^S(t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

(I dati dovranno verificare $g^S(0) = u_0(0)$).

Procedimento per trovare la soluzione in un generico punto (x_1, t_1):

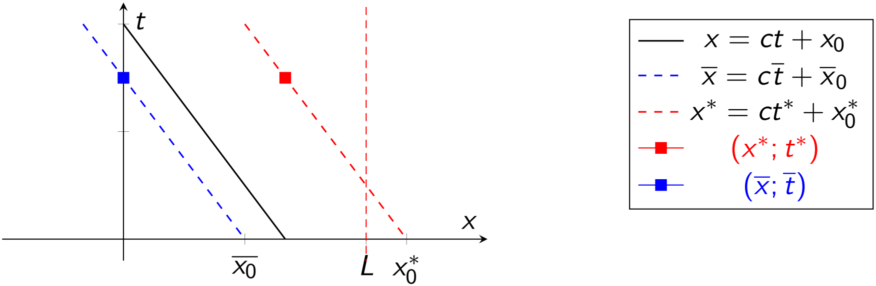
- si calcola la linea caratteristica passante per quel punto: $(x - x_1) = c(t - t_1)$ e si determina l'intersezione con l'asse delle x cioè per $t = 0$: $x_0 = x_1 - ct_1$
- se $x_0 \in [0, L] \to u(x_1, t_1) = u_0(x_1 - ct_1)$
- se $x_0 \notin [0, L]$ si calcola l'intersezione con l'asse $t \to$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - x_1 = c(t - t_1) \end{cases} \Rightarrow t_0 = -\frac{x_1}{c} + t_1$$

Sapendo che sulla linea caratteristica la u deve essere costante si pone

$$u(x_1, t_1) = g^S(t_0)$$

Si ragiona esattamente allo stesso modo se $c < 0$ (vedi figura):



Ora bisogna dare una condizione ai limiti per $x = L$ (nel secondo estremo).

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ u(L,t) = g^D(t) \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

(e si dovrà avere $g^D(L) = u_0(L)$)

Problema ai valori iniziali e al bordo

In un problema di trasporto solo su un intervallo (e non su tutta la retta reale) la condizione iniziale non basta; serve anche una condizione sul bordo (destro se le linee caratteristiche hanno pendenza negativa, sinistro se la pendenza delle linee caratteristiche è positiva).
Più precisamente, la condizione va imposta all'**inflow** cioè sul lato in cui le linee caratteristiche **entrano** (nella direzione dei *tempi crescenti*).

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \quad 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ u(\cdot, t) = g(t) \quad \forall t > 0 \end{cases} \tag{5}$$

La soluzione $u(x,t)$ vale:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-ct) \text{ se } x_0 = x - ct \in [0, L] & (*) \\ g(\bar{t}) \text{ se } x_0 = x - ct \notin [0, L] \quad \bar{t} = -\dfrac{1}{c}x + t \end{cases}$$

$g(\bar{t})$ è il valore del dato all'inflow nel punto di intersezione $\bar{t}$ della caratteristica con l'inflow.

Esercizio: il problema è ben posto?

- esistenza soluzione: abbiamo scritto esplicitamente la sua espressione in (*)

Esercizio: il problema è ben posto?

- esistenza soluzione: abbiamo scritto esplicitamente la sua espressione in (*)
- unicità: per contraddizione (se $u_1 \neq u_2$ sono due soluzioni di (5), la differenza $u_1 - u_2$ verifica il problema con dati, iniziale e all'inflow, identicamente nulli. Quindi (*) implica $u_1 - u_2 \equiv 0$)

Esercizio: il problema è ben posto?

- esistenza soluzione: abbiamo scritto esplicitamente la sua espressione in (*)
- unicità: per contraddizione (se $u_1 \neq u_2$ sono due soluzioni di (5), la differenza $u_1 - u_2$ verifica il problema con dati, iniziale e all'inflow, identicamente nulli. Quindi (*) implica $u_1 - u_2 \equiv 0$)
- stabilità: sia u la soluzione di (5), e sia $\tilde{u}$ la soluzione del problema con dati $\tilde{u}_0(x)$ e $\tilde{g}(t)$ perturbati in modo che

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\|_\infty \leq |\varepsilon| \quad \text{e } \|g - \tilde{g}\|_\infty \leq |\varepsilon|$$

La differenza $w = u - \tilde{u}$ vale (usando la (*))

$$w(x,t) = \begin{cases} u_0(x-ct) - \tilde{u}_0(x-ct) \text{ se } x_0 = x - ct \in [0,L] \\ g(\bar{t}) - \tilde{g}(\bar{t}) \text{ se } x_0 = x - ct \notin [0,L] \end{cases} \quad ($$

Dunque: $\|w\|_\infty = \|u - \tilde{u}\|_\infty \leq |\varepsilon|$