$$|z-i|\cdot|z| = |z-i|^2$$

$$|z-i|\cdot|z| - |z-i|^2 = 0$$

$$|z-i|\left[\,|z| - |z-i|\,\right] = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo

1) $|z-i| = 0 \implies z = i$

oppure

2) $|z| = |z-i|$

Se poniamo $z = x+iy$, otteniamo

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}+\cancel{y^2} - 2y + 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

La soluzione, dunque, è data in questo secondo caso da tutti i numeri complessi $z = x + \frac{1}{2}i$ con $x \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Si può risolvere anche per via geometrica. Infatti

$$|z| = |z-i|$$

è equivalente a cercare $z \in \mathbb{C}$ t.c.

$$d(z,0) = d(z,i)$$

e la soluzione è l'asse del segmento in figura