ESERCIZI ASSEGNATI IL 19/10/2017

① $f: (-1,0) \cup (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = (1-x^2)^{-\frac{|x|+x}{\log_3(1-x^2)}}$$

Abbiamo

$$(1-x^2) = 3^{\log_3(1-x^2)}$$

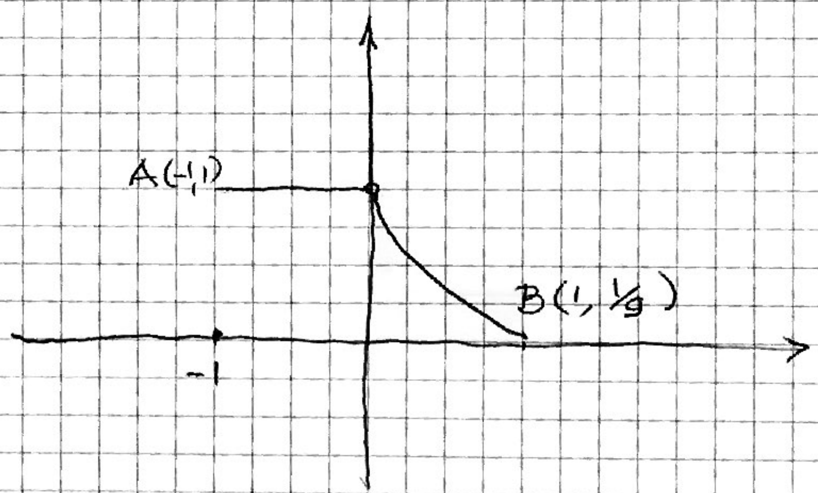
Pertanto

$$(1-x^2)^{-\frac{|x|+x}{\log_3(1-x^2)}} = 3^{\log_3(1-x^2)\left[-\frac{|x|+x}{\log_3(1-x^2)}\right]}$$

$$= 3^{-(|x|+x)}$$

Pertanto

$$f(x) = 3^{-(|x|+x)} = \begin{cases} 3^{-(-x+x)} = 1 & \text{se } x<0 \\ 3^{-2x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$



---

② $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1+\frac{x}{4}+\sqrt{x}} - \sqrt{1+\frac{x}{4}-\sqrt{x}}$$

Osserviamo che $\forall x \geq 0$

$$1 + \frac{x}{4} + \sqrt{x} = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$$

$$1 + \frac{x}{4} - \sqrt{x} = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$$

Quindi

$$\sqrt{1 + \frac{x}{4} + \sqrt{x}} = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} = \left|1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right| = 1 + \frac{\sqrt{x}}{2}$$

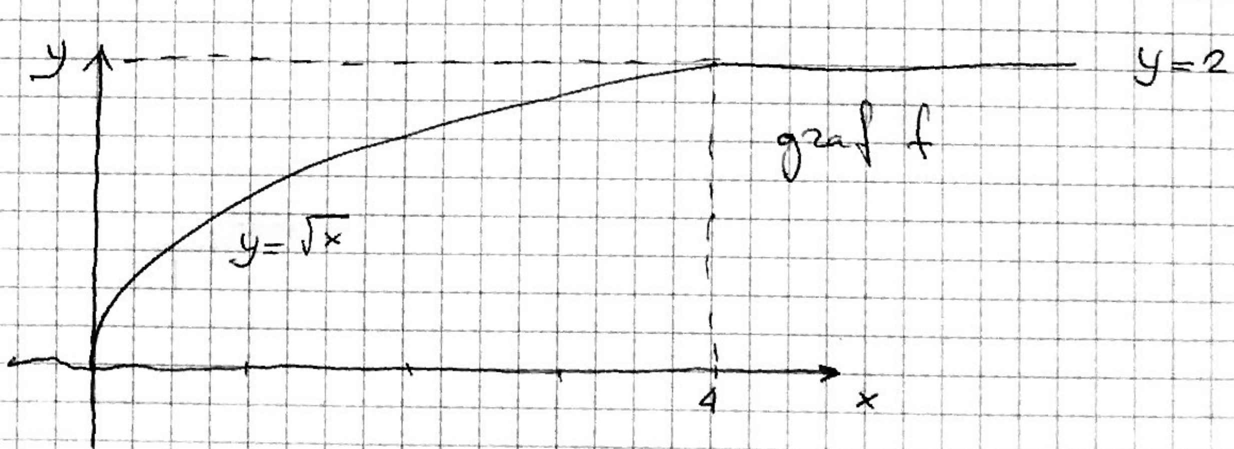
$$\sqrt{1 + \frac{x}{4} - \sqrt{x}} = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} = \left|1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right| = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} & \text{se } x < 4 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Dunque

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\sqrt{x}}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ 1 + \frac{\sqrt{x}}{2} - \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right) & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

ossia

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$



---

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \sin^2 x + e^{\cos x}$

La funzione è pari. Infatti

a) $f(-x) = \sin^2(-x) + e^{\cos(-x)} = \sin^2 x + e^{\cos x} = f(x)$

b) La funzione è inferiormente limitata.
Infatti

$$\sin^2 x \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\cos x} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi $\quad f(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

c) La funzione è superiormente limitata
Infatti

$$\sin^2 x \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\cos x} \leq e \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$f(x) \leq 1+e \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>Osservazione</u> 0 è un minorante e $1+e$ è un maggiorante. <u>Non</u> stiamo affermando che sono l'estremo superiore o inferiore.

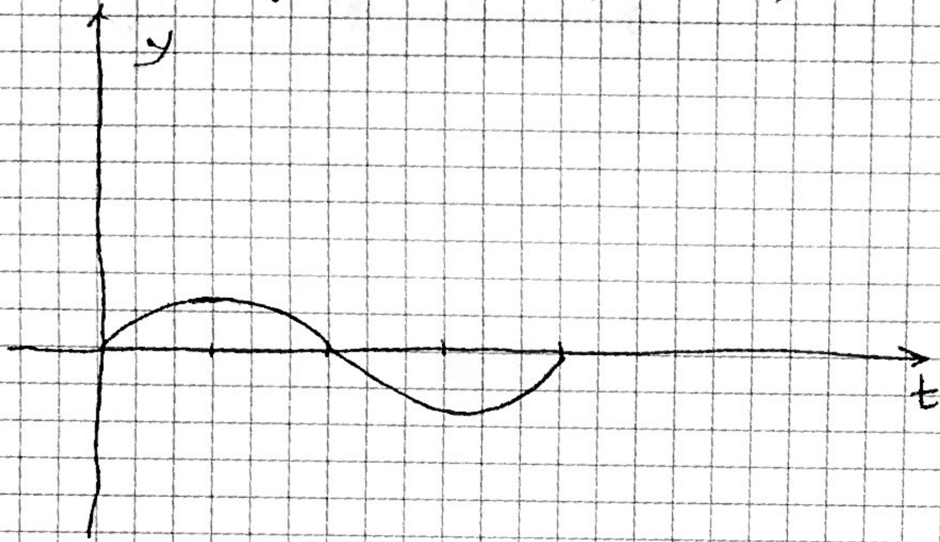
d) La funzione è periodica di periodo 2π, perché sono periodiche di periodo 2π sia $\sin^2 x$, sia $e^{\cos x}$.

---

④ Tracciare il grafico di $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \min_{0 \leq t \leq x} (\sin t) + \max_{0 \leq t \leq x} (\sin t)$$

Tracciamo il grafico di $y = \sin t$, con $t \in [0, 2\pi]$



In $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ risulta $\begin{cases} \max\limits_{0 \le t \le x} \sin t = \sin x \\ \min\limits_{0 \le t \le x} \sin t = 0 \end{cases}$

Con $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ risulta $\begin{cases} \max\limits_{0 \le t \le x} \sin t = 1 \\ \min\limits_{0 \le t \le x} \sin t = 0 \end{cases}$

Con $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ risulta $\begin{cases} \max\limits_{0 \le t \le x} \sin t = 1 \\ \min\limits_{0 \le t \le x} \sin t = \sin x \end{cases}$

Con $x \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ risulta $\begin{cases} \max\limits_{0 \le t \le x} \sin t = 1 \\ \min\limits_{0 \le t \le x} \sin t = 1 \end{cases}$

Pertanto

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, \pi/2) \\ 1 & x \in [\pi/2, \pi) \\ 1 + \sin x & x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi] \\ 0 & x \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Il grafico è il seguente