Analisi Matematica | IV Appello | Cognome: ______________________

11/7/2017 | | Nome: ______________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 2 ore e 30 minuti.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 1 + i$, e sia $C = \dfrac{z^2 - 2}{\bar{z}} + 3$.
Allora $3\,C =$ ___3___ . 2 pt.

2. Sia
$$l = \lim_{x \to 0} \frac{x(e^{x^2} - 1) - \ln(1 + x^3)}{x^5}.$$
Allora $4\,l =$ ___2___ . 2 pt.

3. Sia $f(x) = \ln(1 + \sin(\pi x))$, e sia $t(x)$ la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$. Allora $\dfrac{t(2)}{\pi} =$ ___-1___ . 2 pt.

4. Sia dato l'integrale definito
$$I = \int_4^6 \frac{1}{(x-2)(x+4)}\, dx.$$
Allora $I =$ ___$1/6\,(\ln 8/5)$___ . 2 pt.

5. Sia $f(x) = e^{4x} \cosh x + \arctan x$, e sia $g(y)$ la funzione inversa.
Allora $5\,g'(1) =$ ___1___ . 2 pt.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 7y' + 12y = 12\,x + 5 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1\ . \end{cases}$$
Si determini $y(2) =$ ___3___ . 2 pt.

7. Sia $f(x, y) = 1 + x^2y^2 - 2x - 2y$, $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Determinare e classificare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$.
Abbiamo ___$(1, 1)$**; si tratta di un punto di sella**___ . 2 pt.

8. Sia $z = g(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione cartesiana $z = xy + \arctan(xy)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nel punto $(x_o, y_o, z_o) = (1,\ 1,\ z(1, 1))$ di S.
Allora $g(3, 3) =$ ___$7 + \pi/4$___ . 2 pt.

9. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Allora $\displaystyle\int_E xy\, dxdy =$ ___$1/6$___ .
N.B.: Sfruttare la contemporanea simmetria del dominio E e della funzione $f = xy$. 2 pt.

10. Si consideri la forma differenziale lineare 2 pt.

$$\omega = \left(\frac{y}{1+xy} + \cos x\right) dx + \left(\frac{x}{1+xy} - \sin y\right) dy$$

nell'aperto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 + xy > 0\}$. Sia u il potenziale che verifica $u(0,0) = 0$. Allora $u(\frac{\pi}{2}, 0) =$ ______1______

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \sin x \, e^{\cos(3x)}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: **A B C D F H** 3 pt.

12. Enunciare una condizione sufficiente affinché una forma differenziale lineare ω sia esatta in un aperto $E \subset \mathbb{R}^2$. 3 pt.

Soluzione:

13. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro. L'integrale improprio $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x(x-2)(x+4)} \mathrm{d}x$ è convergente: 4 pt.

(a) per $\alpha > 1$

(b) per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) per $\alpha > 1/2$

(d) per $\alpha < 2$

(e) per tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$

(f) solo per $\alpha \leq 0$

14. Dire quale delle seguenti serie numeriche sono convergenti: 4 pt.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + |\sin n|}{\sqrt{n+1}}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2^{n+2}}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n^2+1}$.

______**1,3**______