APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DEL 12 NOVEMBRE 2020

COGNOME e NOME   NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π-periodica, **dispari**, definita da

$$f(t) = \pi - 2t, \quad t \in (0, \pi).$$

a) Disegnare il grafico della funzione.
b) Verificare che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier.
c) Scrivere tale sviluppo in forma trigonometrica.
d) Studiare la convergenza della serie alla funzione.
e) Utilizzando l'identità di Parseval, determinare la somma della serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

2) Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z},$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

3) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = 3x^3 + xy^2 - x$. Determinare il massimo ed il minimo assoluti della f nel compatto $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}$.

4) Verificare che l'equazione

$$e^{x-y} - 1 + x^3 - \sin y^2 = 0$$

è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno del punto $O(0, 0)$. Tracciare, poi, un grafico qualitativo in un intorno di O della linea Γ implicitamente definita dall'equazione.

5) Dato il funzionale

$$J(y) = \int_0^{\ln 2} \left[2y - e^x \left(y^2 + \frac{(y')^2}{2} \right) \right] dx,$$

determinare l'estremale che soddisfa le condizioni $y(0) = 2$, $y(\ln 2) = \frac{5}{2}$. Verificare, poi, che l'estremale è un estremante, precisando se è di massimo o di minimo.