MODELLI E METODI MATEMATICI I

SECONDA PROVA IN ITINERE del 1 febbraio 2007

COGNOME e NOME NUMERO di MATRICOLA

1) Data l'equazione differenziale alle derivate parziali del I ordine

$$y\, u_x + x\, u_y = \gamma u, \quad \gamma \text{ un parametro reale positivo,}$$

determinare in forma parametrica

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad u = u(s,t),$$

la superficie integrale passante per la linea L di equazioni parametriche

$$f(s) = s, \qquad g(s) = 0, \qquad h(s) = \ln(1+s^2) \qquad s > 0,$$

dopo aver verificato che le condizioni di risolubilità sono soddisfatte. Scritta la soluzione in forma cartesiana $u = u(x,y)$ nel dominio piano $|x| > |y|$, verificare che tale soluzione è discontinua in corrispondenza della retta $y = x$ e continua, ma non di classe C^1, in corrispondenza della retta $y = -x$; spiegare tale comportamento in termini di linee caratteristiche.

2) Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < 2\pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u(2\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 4\pi^2 - x^2 & x \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Nota: è importante osservare che nella variabile x si ha a che fare con un problema di Sturm–Liouville regolare.

3) Utilizzando la trasformata di Fourier, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\, u & x \in \mathbf{R},\ t > 0 \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x,t) = 0 & \forall t > 0, \\ u(x,0) = e^{-b|x|}, \quad 0 < b < a, & x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Nota 1: le condizioni di annullamento all'infinito "garantiscono" la necessaria sommabilità della soluzione cercata.

Nota 2: dopo aver determinato l'espressione di $\hat{u}(k,t)$, utilizzare il Teorema di inversione e lasciare la soluzione $u(x,t)$ sotto forma di integrale.

4) Applicando la formula di risoluzione generale per l'equazione delle onde ed utilizzando la nota relazione

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D),$$

dove A, B, C, e D sono i vertici di un parallelogramma costruito con le caratteristiche, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0,1[, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,1], \\ u_t(x,0) = 1 & x \in [0,1], \end{cases}$$

<u>**nel dominio**</u> $x \in [0,1], \quad t \in [0,1]$.
Facoltativo: determinare la soluzione in tutta la striscia $x \in [0,1], \quad t \geq 0$.

5) Determinare la soluzione del medesimo problema con il metodo della trasformata di Laplace in tutta la striscia $x \in [0,1], \quad t \geq 0$.
Nota: limitarsi a calcolare la $\mathcal{L}$–trasformata.
Facoltativo: utilizzando il Teorema di inversione di Riemann-Fourier, determinare la soluzione $u(x,t)$ come somma di una opportuna serie.

6) Si consideri l'equazione

$$y^2(1+x)\, u_{xx} + 2y(1+|x|)\, u_{xy} + (1+x)\, u_{yy} = 0.$$

   a) Classificarla e determinarne le linee caratteristiche.
   b) Verificare che in un opportuno dominio del piano (da indicare!) la retta $y = 2$ può essere assunta come linea portante i dati.