MODELLI E METODI MATEMATICI I
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 1 FEBBRAIO 2008

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri lo spazio di Hilbert $H = L^2(\mathbf{R})$, dotato dell'usuale prodotto interno, e il sottospazio V generato dai tre vettori linearmente indipendenti

$$u_o = \exp(-\frac{x^2}{2}), \qquad u_1 = x\ \exp(-\frac{x^2}{2}), \qquad u_2 = x^2\ \exp(-\frac{x^2}{2}).$$

Ricordando che $\int_{\mathbf{R}} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}$, determinare la proiezione ortogonale su V della funzione $f = x\exp(-x^2)$.

2) Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(\pi - x) & x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

3) Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = 0, & x \in]0, \pi[,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x & x \in [0, \pi], \\ u_t(x,0) = \chi_{[0,\frac{\pi}{2}]}(x) & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

4) Si consideri l'equazione del II ordine

$$\frac{1}{x^2}\, u_{xx} + \frac{2}{x}\, u_{xy} + (\sin^2 y)\, u_{yy} = 0.$$

Classificare l'equazione, detrminarne le linee caratteristiche e verificare che si può assumere la retta $y = \frac{\pi}{4}$ come linea portante i dati.

5) Determinare la funzione $u = u(x,y)$ soluzione dell'equazione del I ordine

$$x\, u_x + xy^2\, u_y = xy\, u,$$

passante per la linea di equazioni parametriche

$$f(s) = s, \qquad g(s) = s, \qquad h(s) = 1,$$

dopo aver verificato le condizioni di risolubilità.

6) Si consideri lo spazio

$$H^1(\mathbf{R}) := \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ t.c. } f \in L^2(\mathbf{R}) \text{ e } f' \in L^2(\mathbf{R})\},$$

dotato del prodotto interno

$$(f, g)_{H^1(\mathbf{R})} := \int_{\mathbf{R}} fg \, dx + \int_{\mathbf{R}} f'g' \, dx.$$

Integrando opportunamente per parti, verificare che per ogni funzione $f \in H^1(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$ risulta

$$\left(f, \frac{1}{2}\exp(-|x|)\right)_{H^1(\mathbf{R})} = f(0).$$