MODELLI E METODI MATEMATICI I

SECONDA PROVA IN ITINERE del 3 febbraio 2005

COGNOME e NOME NUMERO di MATRICOLA

1) Siano $H = L^2(0,2)$ dotato dell'usuale prodotto interno e V la varietà lineare di H costituita dai polinomi di grado minore o uguale a 2. Data la funzione $f(x) = \cos(\pi x)$, trovare la migliore approssimazione di f in V rispetto alla norma di H.

2) Data l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$u_x + (x+y)\, u_y = xu,$$

determinare la superficie integrale di equazione $z = u(x,y)$ passante per la linea L di equazioni parametriche

$$f(s) = s, \qquad g(s) = 2s, \qquad h(s) = 3s$$

dopo aver verificato le condizioni di risolubilità.

3) Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x) & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

4) Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \sin x & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\sin x & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

4.1) **Facoltativo** - Verificare che si ottiene (più rapidamente!) la soluzione con il metodo della trasformata di Laplace.

4.2) **Facoltativo** - Verificare che nel dominio

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le t \le x\} \cup \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 :\ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi,\ 0 \le t \le \pi - x\}$$

la formula di risoluzione generale per l'equazione delle onde fornisce (ancora più rapidamente) la soluzione.

5) Determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 1 & t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in [0, L]. \end{cases}$$

NOTA: limitarsi a calcolare la $\mathcal{L}$-trasformata della u.

6) Determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0 \le x \le 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1 & t > 0 \\ u(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

limitandosi a calcolare la $\mathcal{L}$-trasformata della u.

6.1) **Facoltativo** - Utilizzando la formula di inversione di Riemann - Fourier, ricavare l'espressione esplicita della $u(x,t)$

7) Classificare l'equazione

$$4\, u_{xx} - 4(\sin x)\, u_{xy} - (\cos x)^2\, u_{yy} = 0$$

e determinarne le eventuali linee caratteristiche passanti per il punto $(0,0)$. Ridurre poi l'equazione in forma canonica.

8) Si consideri l'equazione

$$x^2\, u_{xx} + x(1+y)\, u_{xy} + y\, u_{yy} = 0.$$

1) Classificarla e determinarne le caratteristiche.
2) Verificare che per $x > 0$ la retta $y = 3$ può essere assunta come linea portante i dati. Determinare inoltre $\bar{x}$ tale che, modificando il valore della u in $P(x,3)$ con $x > \bar{x}$, non cambi il valore di $u(e,4)$.